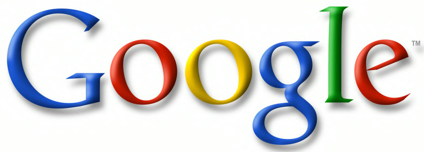
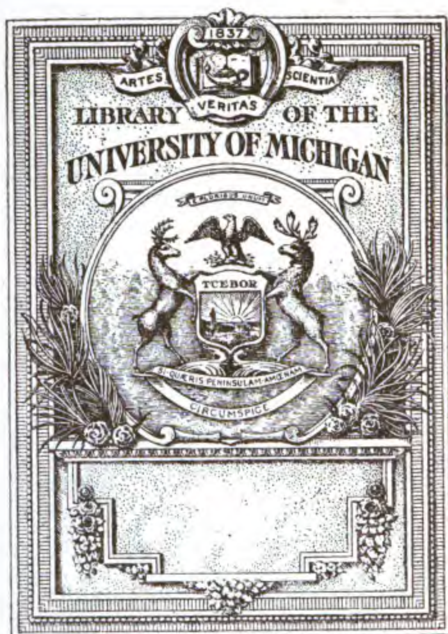



1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE

272 44

Leitfaden und Repetitorium

der

Analytischen Mechanik.

Für Studierende an Universitäten und technischen Hochschulen.

Von

Rector **Dr. Albert Bieler.**

In zwei Teilen.

Erster Teil:

Analytische Statik der festen Körper.

Mit erläuternden Beispielen und in den Text gedruckten Holzschnitten.

Leipzig,

Verlag von Wilhelm Violet.

1888.

Prof. A. Ziwet
gt.
12-22-1922

Vorwort.

Diese Schrift ist hervorgegangen aus dem Bedürfnisse der Studierenden nach einem kurzgefaſsten Buche, welches geeignet wäre, ihnen als Leitfaden für die Vorlesungen und insbesondere zur Repetition beim ersten Studium in der analytischen Mechanik zu dienen.

Das Buch bietet in knapper, klarer Form und übersichtlicher Ordnung nur das Notwendigste. Die Prinzipe von dem Hebel, der schiefen Ebene u. a. sind unberücksichtigt geblieben in der Erwägung, daſs überall dem Studium der höheren Mechanik das der Elementar-Mechanik voraufgeht, wobei die betreffenden Partieen bereits erledigt sein sollen. Ebenso sind die Probleme über Elasticität und Festigkeit ausgeschlossen worden; einerseits, weil diese nicht in den Kreis des Universitätsstudiums gehören, andererseits, weil diese an polytechnischen Schulen in besonderen Vorlesungen ausführlich behandelt zu werden pflegen. In Folge dessen hat auch die Lehre vom Stoſse keine Berücksichtigung gefunden, weil hierbei die Elasticität der Körper hätte in Betracht gezogen werden müssen.

Den einzelnen Kapiteln sind, wo es für nötig erachtet wurde, zur Erläuterung Aufgaben ein- oder angefügt, welche mit vollständigen Lösungen versehen

worden sind. Die Aufgaben sind vielfach der vortrefflichen „Aufgabensammlung aus der analytischen Mechanik“ von A. Fuhrmann (Leipzig, Teubner), welche ich hier zugleich den Studierenden noch zur weiteren Übung empfehle, entnommen.

Der erste Teil des Buches umfaſst die Statik der festen Körper, der zweite Teil, welcher die Dynamik der festen Körper enthalten wird, soll sobald als möglich nachfolgen.

Mit Rücksicht auf die Lehramtskandidaten, welche nur eine Nebenfacultas in der Mathematik sich zu erwerben beabsichtigen, für welche also die Anschaffung des zweiten Teiles nicht nötig sein würde, wird jeder Teil einzeln abgegeben werden.

Möge die Arbeit eine freundliche Aufnahme und eine nachsichtige Beurteilung finden!

Gräfenthal, im Dezember 1887.

Bieler.

Inhalts-Verzeichnis.



I.

Zusammensetzung und Gleichgewicht der Kräfte, welche auf einen vollkommen freien materiellen Punkt wirken.

1. **Eine Kraft** ist vollständig bestimmt, wenn ihre Gröſse, ihre Richtung und ihr Angriffspunkt gegeben sind. Man stellt eine Kraft geometrisch dar durch eine Strecke. Zwei Kräfte P und Q zusammensetzen heiſst, eine dritte Kraft R so bestimmen, daſs durch sie genau dieselbe Wirkung hervorgebracht wird, wie durch P und Q zusammen. Man nennt R die Resultante von P und Q. P und Q heiſsen die Komponenten von R.

2. **Grundgesetze der Statik.** Wirken zwei Kräfte P und Q unter einem Winkel von 0^0, d. h. in einer geraden Linie genau nach derselben Richtung, oder unter einem Winkel von 180^0, d. h. in einer geraden Linie genau nach entgegengesetzter Richtung auf einen Punkt, so ist ihre Resultante R im ersten Falle gleich der Summe, im zweiten Falle gleich der Differenz der beiden Kräfte P und Q. Die Richtung von R ist im ersten Falle die gemeinsame Richtung der beiden Kräfte, im zweiten Falle diejenige der gröſseren Kraft. Der Angriffspunkt bleibt natürlich derselbe.

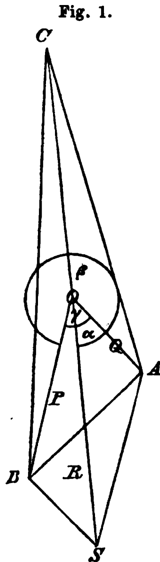
$$R = P + Q; \text{ und } R = P - Q \text{ (wenn } P > Q).$$

Wirken zwei Kräfte P und Q unter einem Winkel von 90° auf einen Punkt, so wird ihre Resultante R der Gröfse und Richtung nach dargestellt durch die vom Angriffspunkte ausgehende Diagonale des aus den beiden Kraftlinien konstruierten Rechtecks.

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2}, \ \cos(R, P) = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}.$$

Allgemeiner Fall. Wirken zwei Kräfte P und Q unter einem beliebigen Winkel γ auf einen Punkt, so wird ihre Resultante R der Gröfse und Richtung nach dargestellt durch die vom Angriffspunkte aus gehende Diagonale des aus den beiden Kraftlinien konstruierten Parallelogramms. **(Satz vom Parallelogramm der Kräfte.)**

Folgerungen. Es ist



$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\gamma}.$$

$$P : Q : R = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

Hieraus

$$\sin\alpha = \frac{P\sin\gamma}{R}; \ \sin\beta = \frac{Q\sin\gamma}{R}.$$

Verlängern wir R über O hinaus um sich selbst bis C und verbinden wir C mit A und B, ebenso A und B unter einander, so haben die Dreiecke OAC, OBC und OAB gleichen Flächeninhalt; denn $OAC = OBC$, weil sie gleiche Grundlinie und gleiche Höhe haben und aus demselben Grunde ist $OSB = OBC$; $OSB = OAB$; also auch $OBC = OAB$.

3. **Zusammensetzung mehrerer Kräfte.** Wirken mehrere Kräfte in einer geraden Linie auf einen Punkt, so ist, wie nach 2. unmittelbar folgt,

die Resultante gleich der algebraischen Summe der einzelnen Kräfte; wobei alle Kräfte nach der einen Seite hin gerichtet, positiv, alle nach der anderen Seite hin gerichtet, negativ in Rechnung zu stellen sind.

Wirken mehrere Kräfte P_1, P_2, P_3, ... P_n, gleichviel ob sie in einer Ebene liegen, oder nicht, in verschiedener Richtung auf einen Punkt, so wird durch Konstruktion die Resultante gefunden, indem man die Kraftlinien mit Beibehaltung ihrer Richtungen an einander setzt. Die Verbindungslinie des Angriffspunktes mit dem Endpunkte der so erhaltenen gebrochenen Linie stellt die Resultante dar.

Wirken nur drei nicht in einer Ebene liegende Kräfte auf einen Punkt, so wird deren Resultante der Gröfse und Richtung nach stets dargestellt durch die von dem Angriffspunkte ausgehende Diagonale des aus den drei Kraftlinien konstruierten Parallelopipedums. **(Satz vom Parallelopipedum der Kräfte.)**

4. **Zerlegung der Kräfte.** Eine Kraft in zwei andere zerlegen, heifst zwei Kräfte suchen, deren Resultante die gegebene Kraft ist. Eine Kraft wird in zwei andere zerlegt, indem man ein Parallelogramm konstruiert, dessen eine Diagonale die gegebene Kraft darstellt. Die zwei im Angriffspunkt zusammenstofsenden Seiten des Parallelogramms stellen die beiden gesuchten Komponenten vor.

Eine Kraft kann unendlich oftmal in zwei Komponenten zerlegt werden.

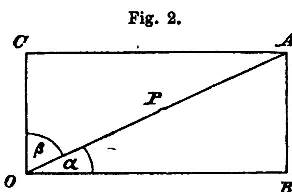
Eine Kraft kann nur auf eine Weise in zwei Komponenten zerlegt werden, sobald die Richtungen der letzteren vorgeschrieben sind.

Jede Kraft kann in drei andere zerlegt werden, indem man ein Parallelopipedum konstruiert, dessen eine Diagonale die gegebene Kraft darstellt. Die drei im Angriffspunkt zu-

sammenstofsenden Kanten des Parallelopipedums sind die drei Komponenten.

Soll eine Kraft P nach zwei auf einander senkrechten Richtungen OX und OY, mit welchen ihre Richtung bez. die Winkel α und β bildet, zerlegt werden, so sind die Komponenten

Fig. 2.



$$OB = P\cos\alpha;$$
$$OC = P\cos\beta = P\sin\alpha.$$

5. **Zusammensetzung der Kräfte durch Zerlegung.** Kräfte in derselben Ebene. Sind gegeben die n Kräfte P_1, P_2, P_3, ... P_n, welche sämtlich auf den Punkt O wirken, so lege man durch den Angriffspunkt O zwei rechtwinklige Axen OX und OY, welche mit den gegebenen Kräften in derselben Ebene liegen, im übrigen aber beliebige Richtung haben mögen. Jede der gegebenen Kräfte zerlege man nach diesen Richtungen in zwei Komponenten. Sodann lassen sich sämtliche Komponenten in jeder der beiden Axen durch algebraische Summierung zu einer Kraft zusammensetzen.

Bezeichnet man nun die Winkel, welche die einzelnen gegebenen Kräfte mit der x-Axe bilden, der Reihe nach mit α_1, α_2, α_3, ... α_n, diejenigen, welche sie mit der y-Axe bilden, der Reihe nach mit β_1, β_2 .... β_n, wobei sämtliche Winkel in demselben Sinne zu zählen sind; bezeichnen wir ferner mit X die Summe aller in die x-Axe fallenden, mit Y die Summe aller in die y-Axe fallenden Komponenten, so ist

$$X = P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + P_3\cos\alpha_3 \ldots + P_n\cos\alpha_n = \Sigma P\cos\alpha;$$
$$Y = P_1\cos\beta_1 + P_2\cos\beta_2 + P_3\cos\beta_3 \ldots + P_n\cos\beta_n = \Sigma P\cos\beta.$$

Ist R die Resultante der sämtlichen gegebenen Kräfte, sind a und b die Winkel, welche R bez. mit der x- und

y-Axe bildet, so ist *R* der Gröfse und Richtung nach vollständig bestimmt durch die Gleichungen:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2};\ \cos a = \frac{X}{R};\ \cos b = \frac{Y}{R}.$$

Kräfte im Raume. Man lege durch den Angriffspunkt *O* drei auf einander senkrecht stehende Axen *OX*, *OY* und *OZ*. Bezeichnet man die Winkel, welche die gegebenen Kräfte mit diesen drei Axen bilden, bez. mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1;\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2;\ \alpha_3, \beta_3, \gamma_3 \ldots;\ \alpha_n, \beta_n, \gamma_n$; und ist noch $Z = \Sigma P \cos\gamma$, so ist jetzt

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2};\ \cos a = \frac{X}{R};\ \cos b = \frac{Y}{R};\ \cos c = \frac{Z}{R}.$$

6. **Bedingungen des Gleichgewichts.** Behalten wir die vorigen Bezeichnungen bei, so sind *n* beliebige Kräfte im Gleichgewicht

in der Ebene, wenn $X = 0$ und $Y = 0$ ist;
im Raume, wenn $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ ist.

Anm. Es bezeichnen auch im folgenden *X*, *Y*, *Z* stets die Summen aller in der Richtung der bez. drei Coordinatenaxen wirkenden Kräfte.

II.

Gleichgewicht der Kräfte, welche auf einen unvollkommen freien materiellen Punkt wirken.

7. Im vorigen war beständig angenommen, dafs der materielle Punkt, auf welchen Kräfte wirkten, sich frei nach jeder beliebigen Richtung hin bewegen konnte. Im Folgenden soll diese Bewegung durch gewisse Bedingungen eingeschränkt werden. Der Punkt soll gezwungen sein, auf einer Kurve, bez. auf einer Fläche zu bleiben.

Grundsatz. Die Wirkung einer solchen Kurve, bezw. Fläche besteht darin, dafs jede zu diesen normal wirkende Kraft vernichtet wird, jede tangential wirkende Kraft dagegen vollständig zur Geltung kommt.

Hiernach ergiebt sich, dafs der materielle Punkt im Gleichgewicht sich befinden wird, sobald die Resultante R sämtlicher auf den Punkt wirkender Kräfte normal zur Kurve bez. Fläche gerichtet ist. Hierfür haben wir in den einzelnen Fällen den analytischen Ausdruck zu suchen.

A) Der Punkt sei gezwungen, auf einer ebenen Kurve zu bleiben.

8. Es sei die Kurve gegeben durch die Gleichung

$$y = f(x).$$

Bildet die Tangente im Angriffspunkte der Kurve mit der x- und y-Axe bez. die Winkel φ und ψ, die Resultante R mit denselben Axen bez. die Winkel a und b, so wird R normal zur Kurve wirken, d. h. R wird im Angriffspunkte auf der Tangente der Kurve senkrecht stehen, wenn

$$\cos a \cos\varphi + \cos b \cos\psi = 0.$$

Es ist nun

$$\cos a = \frac{X}{R}; \; \cos b = \frac{Y}{R};$$

$$\cos\varphi = \frac{dx}{ds}; \; \cos\psi = \frac{dy}{ds}.$$

Folglich ist

$$Xdx + Ydy = 0;$$

oder

$$X + Y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Wird diese Gleichung erfüllt, so findet Gleichgewicht statt. Für diesen Fall giebt die Formel $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ die Gröfse des auf die Kurve wirkenden Druckes an; und

die obigen Formeln für $\cos a$ und $\cos b$ bestimmen die Richtung desselben.

9. **Aufgabe.** Eine aus den Halbaxen a und b konstruierte Ellipse, welche so liegt, dafs ihr Mittelpunkt sich in der y-Axe im Abstande b vom Coordinatenursprunge befindet und ihre grofse Axe parallel zu der der x ist, rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit w um die y-Axe des rechtwinkligen Coordinatensystems. An welchen Stellen der Ellipse ist ein schwererer Punkt von der Masse 1 im Gleichgewicht?

Lösung. Die Gleichung der Ellipse lautet in diesem Falle

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Wenn sich der Punkt an der Stelle xy befindet, so sind die auf ihn wirkenden Kräfte

$$X = w^2 x; \text{ und } Y = -g.$$

Aus der Gleichung für die Ellipse folgt durch Differentiation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Setzt man diese Werte für X, Y und $\frac{dy}{dx}$ in die obige Bedingungsgleichung ein, so wird

$$w^2 x - \frac{gbx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} = 0;$$

und hieraus ergeben sich als Abscissen der Gleichgewichtsstellen

$$x = 0; \text{ und } x = \pm \frac{1}{aw^2} \sqrt{a^4 w^4 - b^2 g^2};$$

welches letztere nur so lange möglich ist, als

$$w > \sqrt{\frac{bg}{a^2}}$$

ist.

10. **Aufgabe.** Auf einen materiellen Punkt wirkt parallel der x-Axe eine Kraft, umgekehrt proportional dem Abstande von der y-Axe; parallel der y-Axe eine andere, umgekehrt proportional dem von der x-Axe. Beide haben für die Einheit des Abstandes die Intensität A. Es soll 1) die Kurve bestimmt werden, auf welcher der Punkt überall im Gleichgewicht ist; 2) die Gröfse des Normaldruckes, welchen die Linie an jeder Stelle xy auszuhalten hat.

Lösung. 1) In der Bedingungsgleichung

$$X+Y\frac{dy}{dx}=0,$$

ist hier

$$X=\frac{A}{x} \text{ und } Y=\frac{A}{y}$$

zu setzen. Dadurch wird

$$\frac{A}{x}+\frac{A}{y}\frac{dy}{dx}=0;$$

oder

$$xdy+ydx=0.$$

Die linke Seite ist ein vollständiges Differential; mithin

$$xy=c,$$

d. h. die verlangte Linie ist eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten die Coordinatenaxen und deren Halbaxen beliebig sind.

2) Der Normaldruck an der Stelle xy ist

$$D=\sqrt{\frac{A^2}{x^2}+\frac{A^2}{y^2}}=A\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}=\frac{A}{c}\sqrt{\frac{c^2+x^4}{x^2}}.$$

B) Der Punkt sei gezwungen, auf einer Raumkurve zu bleiben.

11. Ist die Kurve durch die beiden Gleichungen

$$y=f(x); \text{ und } z=F(x)$$

gegeben, so folgt genau auf dieselbe Weise, wie in 8. als Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0;$$

oder

$$X + Y\frac{dy}{dx} + Z\frac{dz}{dx} = 0.$$

12. Ist die Kurve gegeben durch die beiden Gleichungen

$$f(x, y) = 0 \text{ und } F(x, z) = 0,$$

so ist aus der Differential-Rechnung bekannt,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}}{\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}},$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}}{\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial z}}.$$

Das Übrige bleibt ungeändert.

13. Ist endlich die Kurve gegeben durch

$$F_1(x, y, z) = 0 \text{ und } F_2(x, y, z) = 0,$$

welche zu zwei Flächen gehören, deren Durchschnittslinie die Kurve ist, so sind $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ bestimmt durch

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0.$$

Setzt man die hieraus für $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ folgenden Werte in die letzte Gleichung in 11. ein, so ist dieser Fall auf den früheren zurückgeführt.

14. **Aufgabe.** Eine Cylinderfläche, welche parallel zur z-Axe eines rechtwinkligen räumlichen Coordinatensystems

liegt und über einem Halbkreise steht, dessen einer Durchmesser a die x-Axe und dessen eine Tangente die y-Axe ist, schneidet eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt mit dem Coordinatenanfange zusammenfällt und deren Halbmesser dem Cylinderdurchmesser gleichkommt. Auf der Schnittlinie beider Flächen befindet sich ein Punkt P, welcher dieselbe nicht verlassen kann und auf den die Kräfte U, V, W wirken, die parallel zu den Coordinatenaxen proportional x, y und z sind und für $x = y = z = 1$ die Intensitäten A, B, C haben. Wo ist der Punkt im Gleichgewichte?

Lösung. In diesem Falle ist die Gleichung der Cylinderfläche ($F_1 = 0$)

$$x^2 + y^2 - rx = 0;$$

die Gleichung der Kugel ($F_2 = 0$)

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Durch partielle Differentiation folgt hieraus

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 2(x - r); \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x;$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y; \qquad \frac{\partial F_2}{\partial y} = 2y;$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = 0; \qquad \frac{\partial F_2}{\partial z} = 2z.$$

Diese Werte in die beiden Gleichungen in 13. eingesetzt, giebt

$$x + y\frac{dy}{dx} - r = 0;$$

$$x + y\frac{dy}{dx} + z\frac{dz}{dx} = 0.$$

Hieraus ist sofort

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{r}{z}; \text{ und } \frac{dy}{dx} = \frac{r - x}{y}.$$

Dies substituiert in die Bedingungsgleichung in 11, liefert

$$x = \frac{r(C-B)}{2(A-B)}$$

als Abscisse der Gleichgewichtsstelle.

C) Der Punkt sei gezwungen, auf einer Fläche zu bleiben.

15. Es sei die Fläche gegeben

$$z = f\,(x, y).$$

Soll Gleichgewicht vorhanden sein, so mufs die Resultante R sämtlicher auf den Punkt wirkender Kräfte normal zur Fläche gerichtet sein. Sind nun a, b, c wieder die Winkel, welche R bez. mit der x-, y- und z-Axe bildet, λ, μ, ν die Winkel, welche die Normale im Angriffspunkte zur Kurve mit den bez. Coordinatenaxen bildet, so fällt die Richtung von R mit der Richtung der Normalen zusammen, wenn

$$a = \lambda;\quad b = \mu;\quad c = \nu;$$

oder

$$\cos a = \cos\lambda;\quad \cos b = \cos\mu;\quad \cos c = \cos\nu$$

ist.

Aus der analytischen Geometrie ist bekannt

$$\cos\lambda = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}};$$

$$\cos\mu = -\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}};$$

$$\cos\nu = +\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}};$$

Ferner ist auch hier wieder, wie früher

$$\cos a = \frac{X}{R}; \cos b = \frac{Y}{R}; \cos c = \frac{Z}{R}.$$

Folglich lauten jetzt die Bedingungsgleichungen für den Fall des Gleichgewichts

$$\frac{X}{R} = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}},$$

$$\frac{Y}{R} = -\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}};$$

$$\frac{Z}{R} = +\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}.$$

Diese Gleichungen lassen sich leicht auf die beiden folgenden Gleichungen zurückführen:

$$\frac{X}{Z} = -\frac{\partial z}{\partial x} \text{ und } \frac{Y}{Z} = -\frac{\partial z}{\partial y}.$$

oder

$$X + Z\frac{\partial z}{\partial x} = 0;$$

$$Y + Z\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Werden diese Gleichungen erfüllt, so geben die Formeln für R, $\cos a$, $\cos b$ und $\cos c$ wiederum Gröſse und Richtung des auf die Fläche ausgeübten Druckes an.

16. Ist die Fläche gegeben durch die unentwickelte Gleichung

$$F(x, y, z) = 0,$$

so ist hieraus

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}};$$

und

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Setzt man diese Werte in die früheren Bedingungsgleichungen in 15. ein, so gehen diese über in

$$X\frac{\partial F}{\partial z} - Z\frac{\partial F}{\partial x} = 0;$$

$$Y\frac{\partial F}{\partial z} - Z\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Man kann diese beiden letzten Gleichungen auch in Form einer fortlaufenden Proportion schreiben:

$$X : Y : Z = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z}.$$

17. **Aufgabe.** An welchen Stellen der Ellipsoidfläche $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ befindet sich ein materieller Punkt im Gleichgewichte, wenn auf denselben, parallel zu den Axen, die konstanten Kräfte A, B und C wirken?

Lösung. Es kommen zur Anwendung die beiden letzten Bedingungsgleichungen in 16. In diesen ist zu setzen

$$X = A;\ Y = B;\ Z = C;$$

ferner, wie sich durch partielle Differentiation der Gleichung für die Ellipsoidfläche ergiebt,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2};\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{b^2};\ \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{2z}{c^2}.$$

Sodann gehen obige Gleichungen über in

$$A\frac{2z}{c^2} - C\frac{2x}{a^2} = 0;$$

$$B\frac{2z}{c^2} - C\frac{2y}{b^2} = 0.$$

Nimmt man hierzu noch die gegebene Flächengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

so hat man drei Gleichungen, aus welchen die drei Unbekannten x, y, z zu bestimmen sind. Mit Leichtigkeit findet man

$$x = \pm\frac{Aa^2}{\sqrt{A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2}};$$

$$y = \pm\frac{Bb^2}{\sqrt{A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2}};$$

$$z = \pm\frac{Cc^2}{\sqrt{A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2}}$$

als Coordinaten der Gleichgewichtsstelle.

III.

Zusammensetzung und Gleichgewicht paralleler Kräfte, welche auf ein starres Punktsystem wirken.

18. **Ein starres Punktsystem** ist ein System von materiellen Punkten, deren Lage zu einander, wenn Kräfte an ihnen wirken, sich nicht ändert, deren gegenseitige Entfernungen also unter allen Umständen dieselben bleiben.

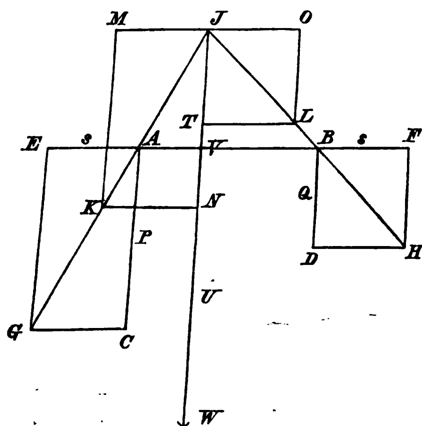
Ein starres Punktsystem bilden die materiellen Punkte eines festen, völlig unbiegsamen Körpers.

Grundsatz. In einem starren Punktsystem darf der Angriffspunkt einer Kraft nach jedem beliebigen Punkte in der Kraftrichtung verlegt werden, ohne dafs dadurch die Wirkung der Kraft geändert würde.

A) Zusammensetzung paralleler Kräfte.

19. Sind gegeben **zwei parallele gleich gerichtete Kräfte** P und Q, deren Angriffspunkte durch die starre Gerade AB verbunden sind, so bringen wir in A und B zwei beliebige, aber völlig gleiche, in der Richtung der Geraden AB entgegengesetzt wirkende Kräfte s an. Die Wirkung

Fig. 3.



von P und Q wird hierdurch nicht geändert; s setzen wir das eine Mal mit P zu AG, das andere Mal mit Q zu BH zusammen. Sodann verlegen wir die Angriffspunkte von AG und BH in den gemeinsamen Schnittpunkt J ihrer Richtungen, so dafs wird $JK = AG$ und $JL = BH$. Darauf zerlegen wir JK und JL wieder in derselben Weise, wie

sie entstanden sind. **Hierdurch entstehen die Komponenten** JM und JN einerseits, und JO und JT andererseits. Es ist JM gleich und direkt entgegengerichtet JO; also heben sie sich auf; so daſs bloſs JN und JT übrig bleiben. $JN = P$ und $JT = Q$ haben denselben Angriffspunkt und ihre Richtungen liegen in einer Geraden und sind gleich. Mithin ist ihre Resultante $JU = JN + JT$; oder $R = P + Q$.

Die **Richtung** von R ist die gemeinsame Richtung von P und Q.

Verlegen wir den Angriffspunkt von R nach V, so daſs $VW = R$ wird, so ist $\triangle JNK \sim \triangle JVA$; und $\triangle JTL \sim \triangle JVB$. Daher $JN : NK = JV : AV$ oder $P : s = JV : AV$; $JT : TL = JV : BV$ oder $Q : s = JV : BV$.

Folglich

$$P . AV = Q . BV$$

oder

$$P : Q = VB : VA;$$

also

Satz. Zwei parallele **gleichgerichtete** Kräfte P und Q haben eine Resultante R gleich ihrer Summe $P + Q$, welche parallel gleichgerichtet mit ihnen ist und so zwischen ihnen liegt, daſs ihre Abstände von den Komponenten P und Q sich umgekehrt, wie die an ihnen wirkenden Kräfte verhalten.

20. Sind gegeben **zwei parallele, entgegengesetzt gerichtete Kräfte** P und Q, so verfahre man genau auf dieselbe Weise, wie in 19. Man gelangt sodann mit Leichtigkeit zu dem

Satz. Zwei parallele **entgegengesetzt gerichtete** Kräfte P und Q haben eine Resultante gleich ihrer Differenz $P - Q$ (wenn $P > Q$), welche auf der Seite der gröſseren P liegt und mit dieser übereinstimmend gerichtet ist. Ihre Abstände von den Komponenten P und Q verhalten sich umgekehrt, wie die an ihnen wirkenden Kräfte.

Verfahren wir auf diese angegebene Weise mit jedem der n Kräftepaare, so bekommen wir durch Zusammensetzung der in der zy-, zx- und xy-Ebene enthaltenen Kräftepaare je ein resultierendes Kräftepaar, dessen Moment bez. ist

$$\Sigma P\,(y\cos\gamma - z\cos\beta) = L;$$
$$\Sigma P\,(z\cos\alpha - x\cos\gamma) = M;$$
$$\Sigma P\,(x\cos\beta - y\cos\alpha) = N.$$

Diese drei Kräftepaare lassen sich zu einem Kräftepaar zusammensetzen, dessen Moment ist

$$K = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}.$$

Die drei Winkel A, B, C, welche die Axe dieses Kräftepaares mit der x-, y-, z-Axe bildet, sind daher

$$\cos A = \frac{L}{K};\ \cos B = \frac{M}{K};\ \cos C = \frac{N}{K}.$$

44. Wir wollen noch den analytischen Ausdruck suchen dafür, dafs die Kraft R und das Kräftepaar K sich in eine Kraft verwandeln lassen. Dies ist, wie schon bemerkt, möglich, wenn die Richtung von R parallel der Ebene des Kräftepaares K ist; oder mit anderen Worten: es mufs die Axe des Kräftepaares K senkrecht auf der Kraft stehen, d. h. es mufs sein

$$\cos a \cos A + \cos b \cos B + \cos c \cos C = 0;$$

oder

$$\frac{X}{R}\cdot\frac{L}{K} + \frac{Y}{R}\cdot\frac{M}{K} + \frac{Z}{R}\cdot\frac{N}{K} = 0;$$

oder

$$XL + YM + ZN = 0.$$

Dies also ist die Bedingung, dafs n beliebige Kräfte, welche an einem starren Punktsystem wirken, nur eine Kraft als Resultante haben.

B) Gleichgewicht beliebiger Kräfte.

45. Ist das System der materiellen Punkte **vollkommen frei**, so mufs, wenn dasselbe sich im Gleichgewicht befinden

soll, da eine Kraft einem Kräftepaar nie das Gleichgewicht halten kann, die Kraft für sich gleich Null und das Kräftepaar für sich gleich Null sein; also

$$R = 0; \text{ und } K = 0;$$

oder $X = 0$; $Y = 0$; $Z = 0$; $L = 0$; $M = 0$; $N = 0$.

Die ersten drei Gleichungen drücken aus, dafs das System keine fortschreitende, die letzten drei, dafs dasselbe keine drehende Bewegung machen kann.

46. Hat das System **einen festen Punkt** in sich, so kann dasselbe immer noch eine drehende Bewegung machen. Wählen wir diesen festen Punkt als Coordinatenanfang, so wird die resultierende Kraft R, welche in diesem Punkte angreift, durch den festen Punkt vernichtet. Dagegen kann die Wirkung des resultierenden Kräftepaares K vollständig zur Geltung kommen. Soll Gleichgewicht vorhanden sein, so ist jetzt hinreichend, dafs

$$L = 0; \ M = 0; \ N = 0$$

ist.

47. Sind in dem Systeme **zwei feste Punkte** vorhanden, so wird die Verbindungsgerade dieser beiden Punkte in allen ihren Teilen fest. Nehmen wir diese Gerade als eine der drei Coordinatenaxen an, z. B. als z-Axe, so kann sich jetzt das System blofs noch frei drehen um diese Axe. Soll Gleichgewicht vorhanden sein, so ist hinreichend, dafs

$$N = 0$$

ist.

V.

Vom Schwerpunkte.

48. Alle Körper auf der Erdoberfläche werden von einer Kraft nach dem Mittelpunkte der Erde hingezogen. Diese Kraft, welche man parallel wirkend mit der physischen Vertikalen, d. h. nach Richtung des auf der Oberfläche des Wassers errichteten Perpendikels annimmt, heifst die **Schwerkraft.** Dieselbe ist konstant, so dafs sie also beständig auf jedes kleinste Teilchen des Körpers dieselbe Wirkung ausübt. Die Richtungen dieser einzelnen Kräfte, welche an sämtlichen materiellen Punkten des Körpers angreifen, sind unter einander parallel. In III. haben wir n solcher paralleler Kräfte zusammensetzen gelernt; jetzt haben wir es mit unendlich vielen solcher Kräfte zu thun. Wenn diese Kräfte ihre gemeinsame Richtung ändern, so giebt es doch, wie wir wissen, einen Punkt, durch welchen beständig die Resultante der Kräfte hindurchgeht. Dieser Punkt, welchen wir früher Mittelpunkt der parallelen Kräfte genannt haben, heifst jetzt **Schwerpunkt** des Körpers.

49. Es handelt sich nun darum, die Intensität der unendlich vielen Kräfte und die Lage des Schwerpunktes zu ermitteln. Die Intensität der sämtlichen Kräfte, d. i. die Schwerkraft, ist nichts anderes als das Gewicht des Körpers. Ein Massenteilchen des Körpers sei dm; die Schwerkraft wirke in der Richtung der z-Axe des rechtwinkligen räumlichen Coordinatensystems; die Coordinaten von dm seien x, y, z. Die Intensität der Schwerkraft hat nun ein bestimmtes Mafs. Die Stärke nämlich, mit welcher die Masse 1 angegriffen wird, ist gleich g. gdm ist die Kraft, welche früher mit P bezeichnet wurde. Die Summe Σgdm dieser sämtlichen Kräfte wird in diesem Falle als Integral $\int gdm$

sich darstellen. Dies drückt also das Gewicht des Körpers aus. Früher hatten wir $\int g dm$ mit R bezeichnet. Nach der Theorie der parallelen Kräfte war nun

$$R\xi = \Sigma Px;\quad R\eta = \Sigma Py;\quad R\zeta = \Sigma Pz.$$

Diese Formeln gehen jetzt über in

$$\xi \int g dm = \int x g dm;\quad \eta \int g dm = \int y g dm;\quad \zeta \int g dm = \int z g dm.$$

Da g konstant für alle Teile des Körpers ist, wird

$$\xi \int dm = \int x dm;\quad \eta \int dm = \int y dm;\quad \zeta \int dm = \int z dm.$$

Bezeichnet V das Volumen des Körpers, und p die Dichtigkeit von dm, so wird, da $dm = p dV$ ist,

$$\xi \int p dV = \int x p dV;\quad \eta \int p dV = \int y p dV;\quad \zeta \int p dV = \int z p dV.$$

Die Gröfse p mufs als Funktion der Coordinaten x, y, z gegeben sein; man setzt dann ihren Wert in diese Formeln hinein.

Für homogene Körper, d. h. für solche, bei welchen die Dichtigkeit konstant ist, wird

$$\xi \int dV = \int x dV;\quad \eta \int dV = \int y dV;\quad \zeta \int dV = \int z dV.$$

Die vorkommenden Integrale sind meist mehrfache. Die Grenzen der Integrationen ergeben sich in jedem speziellen Falle aus der Natur des gerade in Betracht kommenden Gebildes.

Bisweilen werden eine oder auch zwei Dimensionen des Körpers unendlich klein, dann erhalten wir die Aufgabe, den Schwerpunkt einer Fläche, bez. einer Linie zu suchen. Obgleich Fläche und Linie ohne materiellen Inhalt, also auch ohne Gewicht sind, so pflegt man doch von ihren Schwerpunkten zu reden; insofern nämlich man sich auf dieselben parallele Kräfte wirkend denkt und sich deren Verteilung als gleichförmig vorstellt, wenn man von homogenen Flächen oder Linien redet; als ungleichförmig, wenn man vom Gegenteil spricht.

50. **Allgemeine Sätze über Schwerpunktsbestimmung.** a) Ist ein homogenes Gebilde in Bezug auf

eine Ebene symmetrisch, so liegt der Schwerpunkt desselben in dieser Ebene.

b) Ist ein homogenes Gebilde in Bezug auf eine Axe symmetrisch, so liegt der Schwerpunkt in dieser.

c) Besteht ein homogenes Gebilde aus zwei Teilen, so liegt der Schwerpunkt des Gesamtgebildes auf der geraden Verbindungslinie der Schwerpunkte der beiden Teile, und zwar da, wo diese Linie im umgekehrten Verhältnisse der Gewichte dieser Teile geteilt wird.

d) Sin m, m', m'' ..... die Massen der Teile eines homogenen Gebildes, deren Schwerpunkte einzeln bez. als x, y, z; x', y', z'; ..... bekannt sind, so ist auch der Schwerpunkt des Gesamtgebildes bestimmt durch

$$\xi = \frac{mx + m'x' + m''x'' + \ldots\ldots}{m + m' + m'' + \ldots\ldots}; \quad \eta = \frac{my + m'y' + m''y'' + \ldots\ldots}{m + m' + m'' + \ldots\ldots};$$

$$\zeta = \frac{mz + m'z' + m''z'' + \ldots\ldots}{m + m' + m'' + \ldots\ldots}.$$

e) Liegen die Schwerpunkte der einzelnen Teile eines homogenen Gebildes in einer Geraden, so liegt der Schwerpunkt des Gesamtgebildes in derselben Geraden.

A) Bestimmung des Schwerpunktes von Linien.

51. **Allgemeine Formeln.** Es bezeichnen ξ, η, ζ die Coordinaten des Schwerpunktes der Linie, stets bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem; ferner bezeichne ds das Bogenelement; und p sei die Dichtigkeit im Punkte xy.

a) Ebene Kurven.

α) Es sei die Gleichung der Kurve gegeben in rechtwinkligen Coordinaten : $y = f(x)$. Der Bogen s, dessen Schwerpunkt bestimmt werden soll, werde gerechnet von x_0 bis x_1.

Ist p veränderlich, $p = \psi(x, y)$, so ist

$$\xi \int_{x_0}^{x_1} p\,ds = \int_{x_0}^{x_1} xp\,ds; \quad \eta \int_{x_0}^{x_1} p\,ds = \int_{x_0}^{x_1} yp\,ds;$$

$$\text{wo } ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx \text{ ist.}$$

Ist p constant, dann ist einfacher

$$s\xi = \int_{x_0}^{x_1} x\,ds; \quad s\eta = \int_{x_0}^{x_1} y\,ds;$$

$$\text{wo } s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, . dx \text{ ist.}$$

β) Es sei die Gleichung der Kurve, welche als homogen vorausgesetzt werden soll, in Polarcoordinaten gegeben: $r = f(\varphi)$. Der Bogen, dessen Schwerpunkt zu bestimmen ist, werde gerechnet von der Anomalie φ_0 bis zur Anomalie φ_1. Das Polarcoordinatensystem und das rechtwinklige Coordinatensystem, auf welches ξ und η bezogen zu verstehen sind, lege man so, dafs die x-Axe mit der Axe des Polarcoordinatensystems und der Coordinatenanfang mit dem Pole zusammenfällt. Bezeichnet man dann noch mit s_1 den zu φ_1 und mit s_0 den zu φ_0 gehörigen Kurvenbogen, so sind, wenn man zunächst die Linie sich auf das rechtwinklige Coordinatensystem bezogen denkt, ξ und η bestimmt durch

$$(s_1 - s_0)\,\xi = \int_{x_0}^{x_1} x\,ds; \text{ und } (s_1 - s_0)\,\eta = \int_{x_0}^{x_1} y\,ds.$$

Hierauf folgen unmittelbar in Bezug auf das Polarcoordinatensystem:

$$(s_1 - s_0)\,\xi = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} \cos\varphi\, d\varphi;$$

und

$$(s_1 - s_0)\eta = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} \sin\varphi \, d\varphi;$$

worin

$$s_1 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi; \text{ und } s_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi$$

ist.

γ) Nach der **Guldinschen Regel** ist die Oberfläche O eines Rotationskörpers gleich dem Produkte der erzeugenden Linie s in den Weg ihres Schwerpunktes; also wenn die Rotationsaxe als x-Axe genommen wird,

$$O = 2\eta\pi s.$$

Umgekehrt folgt also hieraus

$$\eta = \frac{O}{2\pi s}.$$

b) Raumkurven.

Die Kurve sei gegeben durch die Gleichungen $z = f(x)$; $y = f_1(x)$.

Ist p **veränderlich**, so ist

$$\xi \int_{x_0}^{x_1} p\,ds = \int_{x_0}^{x_1} xp\,ds; \quad \eta \int_{x_0}^{x_1} p\,ds = \int_{x_0}^{x_1} yp\,ds; \quad \zeta \int_{x_0}^{x_1} p\,ds = \int_{x_0}^{x_1} zp\,ds;$$

wo jetzt

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx \text{ ist.}$$

Ist p **constant**, so ist wieder einfacher

$$s\xi = \int_{x_0}^{x_1} x\,ds; \quad s\eta = \int_{x_0}^{x_1} y\,ds; \quad s\zeta = \int_{x_0}^{x_1} z\,ds;$$

$$\text{wo } s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx \text{ ist.}$$

52. **Aufgabe.** Wo liegt der Schwerpunkt eines homogenen Kreisbogens, dessen Sehne $= 2\sigma$ und dessen Radius $= r$ ist?

Lösung. Man lege das rechtwinklige Coordinatensystem so, daſs der Coordinatenanfang in den Kreismittelpunkt und die y-Axe in die Halbierungslinie des Centriwinkels fällt. Nach 50b ist $\xi = 0$, die Ordinate η wird bestimmt durch

$$s\eta = \int_{-\sigma}^{+\sigma} y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \text{ ist.}$$

Es ist $x^2 + y^2 = r^2$; also $xdx + ydy = 0$;

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y};\ y = \sqrt{r^2 - x^2};$$

folglich

$$s\eta = \int_{-\sigma}^{+\sigma} r\,dx;\ \text{ oder } \eta = \frac{2\sigma r}{s};\ \text{d. h.}$$

der Schwerpunkt liegt auf der Halbierungslinie des Centriwinkels so, daſs sich sein Abstand vom Kreismittelpunkte zum Radius verhält, wie die Länge der Sehne zu der des Bogens.

Für den Halbkreis wird $\eta = \frac{2r}{\pi}$.

Dieser Wert ergiebt sich auch schnell unter Anwendung der Formel in 51,a, γ; denn läſst man den Halbkreis um seinen Durchmesser als Axe rotieren, so entsteht eine Kugel, dessen Oberfläche ist

$$O = 4r^2\pi;\ \text{ also } \eta = \frac{4r^2\pi}{2r\pi^2} = \frac{2r}{\pi}.$$

53. **Aufgabe.** Wo liegt der Schwerpunkt eines Cycloidenbogens, welcher vom Wälzungswinkel φ bis zum Wälzungswinkel φ_1 gerechnet wird und wenn der Halbmesser des rollenden Kreises r ist?

Lösung. Legt man das rechtwinklige Coordinatensystem so, daſs die x-Axe mit der als Basis dienenden Geraden zusammenfällt und daſs die x-Axe durch den Anfangspunkt der Cycloide geht, so lautet die Gleichung der Cycloide

$$x = r\,(\varphi - \sin\varphi);\quad y = r\,(1 - \cos\varphi).$$

Hieraus

$$dx = r\,(1 - \cos\varphi)\,d\varphi;\quad dy = r\sin\varphi\,d\varphi$$

$$ds = 2\,r\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi;\quad s = 8\,r\sin^2\frac{\varphi}{4}.$$

Die Coordination ξ und η des Schwerpunkts sind bestimmt durch

$$s\xi = 2r^2\int_0^\varphi(\varphi - \sin\varphi)\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi;\quad s\eta = 2r^2\int_0^\varphi(1 - \cos\varphi)\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi;$$

oder

$$s\xi = 4r^2\left[\frac{4}{3}\sin^3\frac{\varphi}{2} - (\varphi - \sin\varphi)\cos\frac{\varphi}{2}\right].$$

$$s\eta = 8r^2\left[\left(\frac{1}{3}\cos^2\frac{\varphi}{2} - 1\right)\cos\frac{\varphi}{2} + \frac{2}{3}\right].$$

Folglich

$$\xi = \frac{r}{2}\cdot\frac{\frac{4}{3}\sin^3\frac{\varphi}{2} - (\varphi - \sin\varphi)\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{4}};$$

$$\eta = r\cdot\frac{\left(\frac{1}{3}\cos\frac{\varphi}{2} - 1\right)\cos\frac{\varphi}{2} + \frac{2}{3}}{\sin^2\frac{\varphi}{4}}.$$

Für die ganze Cycloide, für welche in den letzten Formeln $\varphi = 2\pi$ zu setzen ist, wird

$$\xi = r\pi;\ \text{und}\ \eta = \frac{4}{3}\,r.$$

54. **Aufgabe.** Welches sind die rechtwinkligen Schwerpunktscoordinaten ξ und η des von o bis π gerechneten homogenen Bogens der Cardioide $r = a\,(1 + \cos\varphi)$?

Lösung. Die gesuchten Coordinaten ergeben sich aus den Gleichungen

$$s\xi = \int_0^\pi r \cos\varphi \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi;$$

$$s\eta = \int_0^\pi r \sin\varphi \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi;$$

$$\text{wo } s = \int_0^\pi \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi \text{ ist.}$$

Setzt man in diese Formeln

$$r = a\,(1 + \cos\varphi);\ \frac{dr}{d\varphi} = -a \sin\varphi;$$

$$\text{mithin } \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} = 2\,a \cos\frac{\varphi}{2},$$

so folgt $s = 4a$; und weiter

$$4\,a\,\xi = 2\,a^2 \int_0^\pi (1 + \cos\varphi) \cos\varphi \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi;$$

$$4\,a\,\eta = 2\,a^2 \int_0^\pi (1 + \cos\varphi) \sin\varphi \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi.$$

Durch die Substitution $\frac{\varphi}{2} = u$ und $\frac{u}{2} = t$ sind die Integrationen leicht ausführbar und man erhält schliefslich

$$\xi = \eta = \frac{4}{5}\,a.$$

55. **Aufgabe.** Welches sind die Schwerpunktscoordinaten des homogenen Schraubenlinienbogens s, welcher von $z = o$ bis $z = z_1$ gerechnet wird?

Lösung. Ist r der Spindelradius, a der sogenannte Parameter der Schraubenlinie, so dass $a = r \tan\alpha$ ist, wo unter α der Steigungswinkel zu verstehen ist, so sind die Gleichungen der Schraubenlinie

$$x = r \cos\frac{z}{a};\ y = r \sin\frac{z}{a}.$$

Die Schwerpunktscoordinaten sind bestimmt durch die Gleichungen

$$\xi s = \int_0^s x\,ds;\quad \eta s = \int_0^s y\,ds;\quad \zeta s = \int_0^s z\,ds.$$

Im vorliegenden Falle wird

$$dx = \frac{r}{a}\sin\frac{z}{a}\,dz;\quad dy = -\frac{r}{a}\cos\frac{z}{a}\,dz;$$

folglich wird

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{dz\sqrt{r^2 + a^2}}{a};$$

und also

$$s = \frac{z\sqrt{r^2 + a^2}}{a}.$$

Mithin

$$\xi z = r\int_0^z \cos\frac{z}{a}\,dz;\quad \eta z = r\int_0^z \sin\frac{z}{a}\,dz;\quad \zeta z = \int_0^z z\,dz;$$

und hieraus

$$\xi = \frac{r\sin\frac{z}{a}}{z};\quad \eta = \frac{ar\left(1 - \cos\frac{z}{a}\right)}{z};\quad \zeta = \frac{z}{2}$$

oder auch

$$\xi = \frac{ay}{z};\quad \eta = \frac{a(r - x)}{z};\quad \zeta = \frac{z}{2}.$$

B) Bestimmung des Schwerpunktes von Flächen.

56. **Allgemeine Formeln.** Es bezeichnen ξ, η, ζ die Schwerpunktscoordinaten der Curve, bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem; ferner bezeichne dF das Flächenelement und p sei die Dichtigkeit im Punkte $x\ y\ z$.

a) Ebene Flächen.

α. Zwei Curven, deren Gleichungen in rechtwinkligen Punktcoordinaten $y_1 = f_1(x)$ und $y_0 = f_0(x)$ gegeben

sind, einerseits und zwei Parallele zur y-Axe andererseits begrenzen ein ebenes Flächenstück F.

Ist p veränderlich, $p = \varphi(x, y)$, so gehen die ganz allgemeinen Formeln

$$\xi \int p\, dF = \int px\, dF \text{ und } \eta \int p\, dF = \int yp\, dF$$

hier über in

$$\xi \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} p\, dx\, dy = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} xp\, dx\, dy; \; \eta \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} p\, dx\, dy = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} yp\, dx\, dy.$$

Ist p constant, so ist einfacher

$$F\xi = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} x\, dx\, dy; \; G\eta = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} y\, dx\, dy;$$

wo $F = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} dx\, dy$ ist.

Wir können in diesem Falle noch die Integration in Bezug auf y ausführen und erhalten dann

$$\xi F = \int_{x_0}^{x_1} x\,(y_1 - y_0)\, dx; \; \eta F = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} (y_1^2 - y_0^2)\, dx;$$

wo $F = \int_{x_0}^{x_1} (y_1 - y_0)\, dx$ ist.

β. Es seien in Polarcoordinaten die Gleichungen der beiden die homogene Fläche F begrenzenden Curven gegeben: $r_1 = f_1(\varphi)$; $r_0 = f_0(\varphi)$; ausserdem werde F von zwei Leitstrahlen begrenzt, welche zu den Anomalien φ_0 und φ_1 gehören.

Es is dann

$$F\xi = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1} r^2 \cos\varphi\, d\varphi\, dr; \; F\eta = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1} r^2 \sin{}^2\varphi\, d\varphi\, dr;$$

wo $F = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1} r\, d\varphi\, dr$ ist;

oder auf einfache Integrale reduciert,

$$F\xi = \frac{1}{3}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (r_1^3 - r_0^3)\cos\varphi\, d\varphi; \; F\eta = \frac{1}{3}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (r_1^3 - r_0^3)\sin\varphi\, d\varphi;$$

wo $F = \frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (r_1^2 - r_0^2)\, d\varphi$ ist.

γ. Nach der Guldinschen Regel ist auch der Körperraum J eines Rotationskörpers gleich dem Produkte aus der erzeugenden Fläche F und dem Wege ihres Schwerpunktes; also wenn die Rotationsaxe wieder als x-Axe angenommen wird,

$$J = 2\eta\pi F.$$

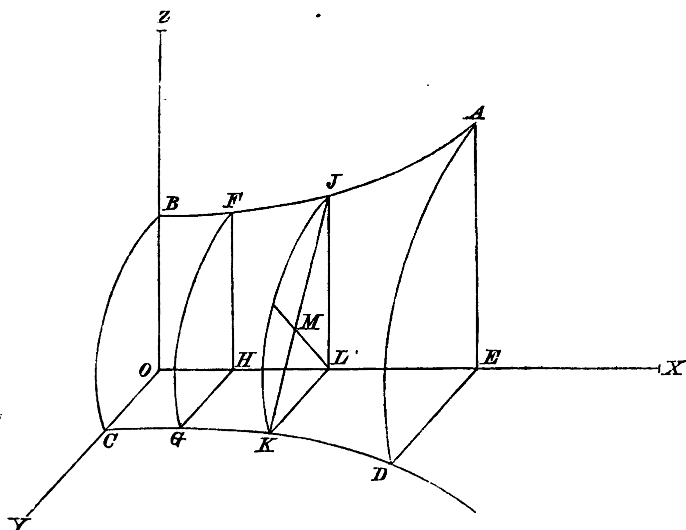
Umgekehrt folgt also hieraus

$$\eta = \frac{J}{2\pi F}.$$

b) Rotationsflächen.

Eine Rotationsfläche sei dadurch entstanden, dass sich die Curve $z = f(x)$, welche ursprünglich in der zx-Ebene

Fig. 12.



liegt, um die x-Axe des rechtwinkligen Coordinatensystems gedreht hat, bis sie in die xy-Ebene angelangt ist. ξ, η, ζ seien die Schwerpunktscoordinaten der Fläche F dieses so erhaltenen Quadranten, gerechnet von $OH = x_0$ bis $OE = x_1$. Denkt man sich F durch Ebenen parallel der yz-Ebene zer-

schnitten in unendlich schmale Streifen, so hat man bei constanter Dichtigkeit der Fläche zunächst

$$\xi F = \int_{x^0}^{x_1} \frac{x z \pi}{2} \cdot ds; \text{ oder } \xi F = \frac{\pi}{2} \int_{x^0}^{x_1} x z \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx.$$

wo $F = \frac{\pi}{2} \int_{x_0}^{x_1} z \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx.$

Es liegen nun die Schwerpunkte der sämtlichen Kreisbögen $\widehat{FG}$, $\widehat{IK}$ u. s. f. in der Ebene, welche durch die x-Axe geht und gegen die xy-Ebene sowohl als gegen die xz-Ebene unter einem Winkel von 45^0 geneigt ist. Daher sind offenbar η und ζ einander gleich. Bezeichnet man mit $\eta_1 = \zeta_1$ die Coordinaten in Bezug auf LK und LI als Axen des Schwerpunkts M eines beliebigen der Viertelkreise, $\widehat{IK}$, so ist $\eta = \zeta$ bestimmt durch

$$F\eta = \int_{x_0}^{x_1} \eta_1 \frac{z \pi}{2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Es ist nach 52. $LM = \frac{\overline{IK} \cdot z}{\widehat{IK}}$; oder

$$LM = \frac{2 z^2 \sqrt{2}}{z \pi} = \frac{2 z \sqrt{2}}{\pi}.$$

Ferner ist

$$2 \eta_1{}^2 = LM^2 = \frac{8 z^2}{\pi^2}; \text{ folglich } \eta_1 = \frac{2 z}{\pi}.$$

Diesen Wert in die obige Formel eingesetzt, giebt

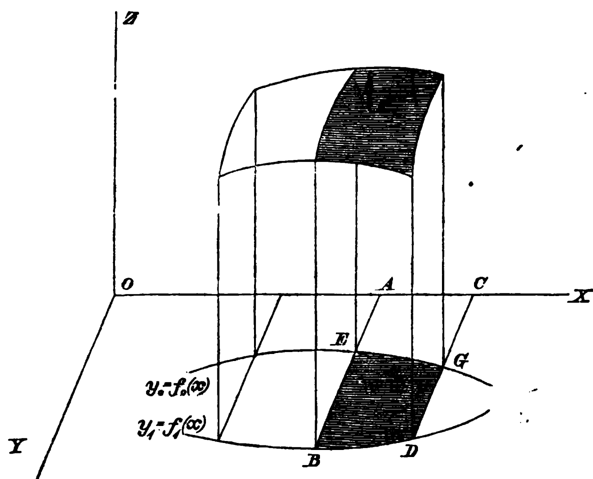
$$F\eta = F\zeta = \int_{x_0}^{x_1} z^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx.$$

c) Beliebige Flächen.

Die Fläche sei durch die Gleichung $z = f(x, y)$ gegeben.

In der xy-Ebene seien die Curven $y_1 = f_1(x)$; $y_0 = f_0(x)$ gegeben, welche zusammen mit den beiden Parallelen AB und CD zur y-Axe das gemischtlinige Viereck $BDEG$ bilden.

Fig. 13.



ξ, η, ζ seien die Schwerpunktscoordinaten des Flächenstücks F, dessen Horizontalprojection $BDEG$ ist.

Bezeichnet dF das Flächenelement im Punkte xyz, und μ den Neigungswinkel der Tangentialebene in xyz gegen die xy-Ebene, so ist

$$dF \cos \mu = dx\, dy; \text{ oder } dF = \frac{dx\, dy}{\cos \mu}.$$

Der Winkel μ ist nun gleich dem Winkel, welchen die im Punkte xyz errichtete Normale der Fläche mit der z-Axe einschliefst, also ist

$$\cos \mu = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}$$

Mithin ist im vorliegenden Falle

$$dF = dx \,.\, dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

Es gehen also die allgemeinen Formeln

$$\xi F = \int x dF;\ \eta F = \int y dF;\ \zeta F = \int z dF,$$

wenn noch $OA = x_0$, $OC = x_1$ ist, jetzt über in

$$\xi F = \int_{x^0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$

$$\eta F = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$

$$\zeta F = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} z \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$

57. **Aufgabe.** Welches sind die Schwerpunktscoordinaten ξ, η, ζ der homogenen Fläche eines Halbkreises vom Radius r?

Lösung. Nimmt man das Kreiscentrum als Coordinatenanfang und den Durchmesser als x-Axe, so ist $\xi = o$ und zur Bestimmung von η dient die Formel

$$\eta F = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} (y_1{}^2 - y_0{}^2)\, dx;$$

worin

$$y_0 = o;\ y_1{}^2 = r^2 - x^2;\ x_0 = -r;\ x_1 = +r;\ F = \frac{r^2\pi}{2}$$

zu setzen ist, so dass wird

$$\frac{r^2\pi}{2}\, \eta = \frac{1}{2} \int_{-r}^{+r} (r^2 - x^2)\, dx; \text{ und hieraus } \eta = \frac{4r}{3\pi}.$$

Derselbe Wert ergiebt sich auch mittelst der Guldinschen Regel. Dreht sich ein Halbkreis um seinen Durchmesser als Rotationsaxe, so entsteht eine Kugel, deren Inhalt $I = \frac{4}{3} r^3\pi$ ist, also hat man nach 56; a; γ:

21. Jede Kraft kann umgekehrt in zwei mit ihr parallele Komponenten zerlegt werden, welche an zwei mit der gegebenen Kraft in derselben Ebene liegenden, sonst aber beliebigen Angriffspunkten wirken.

22. Drehen wir die zwei parallelen Kräfte P und Q, gleichviel ob sie gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind, beide zu gleicher Zeit um einen beliebigen, aber um einen und denselben Winkel, so dreht sich auch ihre Resultante. Der Angriffspunkt derselben aber bleibt völlig ungeändert. Die Bestimmung dieses also ist völlig unabhängig von dem Winkel, welchen die Kräfte mit der starren Verbindungsgeraden bilden.

23. Sind n **parallele**, sonst aber beliebig gerichtete Kräfte $P_1, P_2, P_3, \ldots . P_n$ gegeben, so kann man diese durch die wiederholte Anwendung des Verfahrens von 19. und 20. zusammensetzen.

Satz. Die Resultante von n **parallelen** Kräften ist gleich der algebraischen Summe der Komponenten. Die Richtung der Resultante ist die der Komponenten.

24. Es seien die Kräfte $P_1, P_2, P_3, \ldots . P_n$ gegeben; die Coordinaten der Angriffspunkte derselben seien bez. $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; \ldots . x_n, y_n, z_n$. Es ist dann, wenn R die Resultante der sämtlichen Kräfte bezeichnet, R der Gröfse nach bestimmt durch

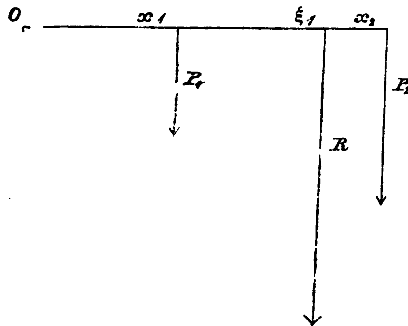
$$R = \Sigma P;$$

wo das Summenzeichen stets die algebraische Summe besagen will.

Da die Richtung der Resultante die Richtung der Komponenten ist, so erübrigt nun noch, ihren Angriffspunkt, dessen Coordinaten ξ, η, ζ sein mögen, zu bestimmen.

25. **Die Angriffspunkte der gegebenen Kräfte liegen sämtlich in einer Geraden.** Wir nehmen auf dieser Geraden einen beliebigen Punkt O als Coordinatenanfang und die Gerade selbst als x-Axe an. Bezeichnen

Fig. 4.



wir die Abscisse des Angriffspunktes der partiellen Resultante von P_1 und P_2 mit ξ, so ist nach 19.

$$\xi_1 - x_1 : x_2 - \xi_1 = P_2 : P_1;$$

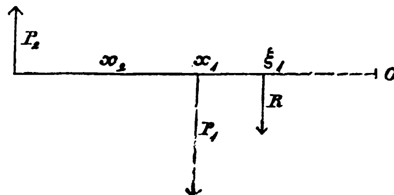
woraus

$$\xi_1 = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2}{P_1 + P_2}.$$

Sind die beiden Kräfte entgegengesetzt gerichtet, so würde sein

$$x_1 - \xi_1 : x_2 - \xi_1 = P_2 : P_1;$$

Fig. 5.



woraus

$$\xi_1 = \frac{P_1 x_1 - P_2 x_2}{P_1 - P_2}.$$

Setzen wir nun $P_1 + P_2$ zusammen mit P_3, welche P_1 gleichgerichtet sei, so ergiebt sich auf dieselbe Weise für die Abscisse ξ_2 des neuen Angriffspunktes dieser Resultante

$$\xi_2 = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3}{P_1 + P_2 + P_3}.$$

Allgemein ergiebt sich dann endlich

$$\xi = \frac{P_1 x_1 \pm P_2 x_2 \pm P_3 x_3 \dots \pm P_n x_n}{P_1 \pm P_2 \pm P_3 \dots \pm P_n} = \frac{\Sigma P x}{\Sigma P}.$$

$P_2, P_3, \dots P_n$ sind positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem sie dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung wie P_1 haben.

26. **Die Angriffspunkte der n Kräfte liegen beliebig im Raume zerstreut.** Wir führen diesen Fall auf den vorigen zurück. Zu diesem Zwecke legen wir das räumliche rechtwinklige Coordinatensystem so, dafs die z-Axe parallel den gegebenen Kräften läuft. Dann verschieben wir zunächst sämtliche Kräfte in ihren Richtungen so weit, bis ihre Angriffspunkte in die Coordinatenebene der xy fallen. Hierdurch wird natürlich auch die Resultante verschoben, so dafs ihr Angriffspunkt auch in diese Ebene fällt. Hierdurch ändert sich nur ζ, welches Null wird. Sodann drehen wir sämtliche Kräfte um 90^0. Dann fallen sie sämtlich in die xy-Ebene hinein, sind der y-Axe parallel und stehen senkrecht auf der x-Axe. Wir verschieben nun die Kräfte noch so, dafs ihre Angriffspunkte alle in die x-Axe fallen. Dadurch wird $\eta = 0$. Ungeändert sind bei allen diesen Verschiebungen geblieben die x; und also auch ξ. Nach 25. ergiebt sich nun sofort

$$\xi = \frac{\Sigma P x}{\Sigma P};$$

Durch zwei andere der soeben dargelegten analoge Ver-

schiebungen der Kräfte aus ihrer ursprünglichen Lage gelangen wir zu

$$\eta = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P};$$

$$\zeta = \frac{\Sigma Pz}{\Sigma P}.$$

Hieraus

Satz. Die Lage des Angriffspunktes der Resultante ist unabhängig von dem Winkel, welchen die Kräfte mit den Verbindungslinien der einzelnen Angriffspunkte bilden.

Dieser specielle Angriffspunkt heifst **Mittelpunkt der parallelen Kräfte.**

Aus den Formeln für ξ, η, ζ folgt noch

$$\xi \Sigma P = \Sigma Px; \quad \eta \Sigma P = \Sigma Py; \quad \zeta \Sigma P = \Sigma Pz;$$

oder $R\xi = \Sigma Px$; $R\eta = \Sigma Py$; $R\zeta = \Sigma Pz$; also

Satz. Das Moment der Resultante ist gleich der Summe der Momente der einzelnen Kräfte.

27. Sind die gegebenen n Kräfte nicht blofs einander parallel, sondern auch unter einander gleich, so gehen für diesen Fall die Formeln für die Coordinaten des Mittelpunktes der parallelen Kräfte über in

$$\xi = \frac{\Sigma x}{n}; \quad \eta = \frac{\Sigma y}{n}; \quad \zeta = \frac{\Sigma z}{n},$$

woraus hervorgeht, dafs jetzt die Lage des Punktes (ξ, η, ζ) nur abhängig ist von der Lage der Angriffspunkte der einzelnen Kräfte gegen einander. Man nennt den Punkt (ξ, η, ζ) in diesem besonderen Falle **Mittelpunkt der mittleren Entfernungen.** Diesen zu bestimmen, ist eine Aufgabe, welche in das Gebiet der analytischen Geometrie gehört.

B) Kräftepaare.

28. Sind n parallele Kräfte gegeben, so kann man sie auch in der Weise zusammensetzen, dafs man zunächst die

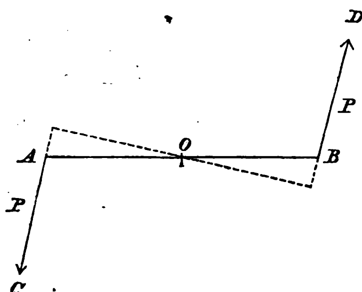
Resultante R_1 aller Kräfte, welche nach der einen Seite hin wirken, dann die Resultante R_2 aller Kräfte, welche nach der anderen Seite hin wirken, sucht und darauf diese beiden partiellen Resultanten zu einer Kraft zusammensetzt. Ergiebt sich hierbei, dafs diese beiden partiellen Resultanten, welche nun natürlich entgegengesetzt sein müssen, völlig gleich sind, und dafs ihre Richtungen nicht in eine gerade Linie zusammenfallen, so wird

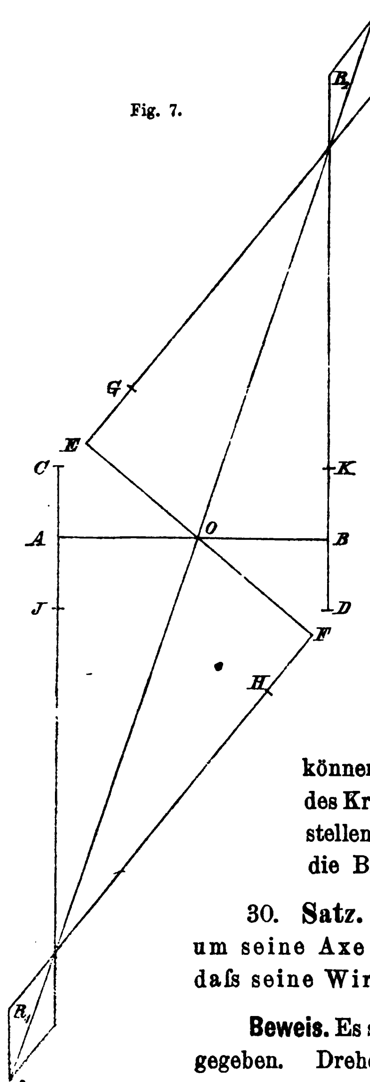
$$R = \Sigma P = 0; \text{ und } \xi = \eta = \zeta = \infty$$

sein, d. h. die Resultante der n parallelen Kräfte ist in diesem besonderen Falle gleich Null und ihr Angriffspunkt ist unendlich weit entfernt; oder, besser gesagt, die Kräfte haben keine bestimmte Resultante. Zwei derartige Kräfte wie R_1 und R_2 erstreben keine fortschreitende Bewegung, sondern eine Drehbewegung.

29. **Erklärung.** Eine solche starre Verbindung zweier paralleler, entgegengesetzt gerichteter und völlig gleicher Kräfte heifst ein **Kräftepaar.** Die starre Verbindungsgerade selbst ist der **Arm** des Kräftepaares. Den **Mittelpunkt** des Armes nennt man **Mittelpunkt** des Kräftepaares. Der senkrechte Abstand der beiden Kräfte wird die **Breite** des Kräftepaares genannt. Unter der **Axe** eines Kräftepaares versteht man die Gerade, welche man sich durch den Mittelpunkt senkrecht auf der Ebene des Kräftepaares errichtet denkt. Das Produkt der Breite des Kräftepaares in eine Kraft heifst das **Moment** des Kräftepaares. Durch dasselbe wird die

Fig. 6.





Wirksamkeit des Kräftepaares gemessen. Ein Kräftepaar kann **rechtsdrehend** oder **linksdrehend** sein, je nachdem welche Seite der Ebene, in welcher das Kräftepaar liegt, man fixiert hat. Zwei Kräftepaare heifsen **übereinstimmend,** wenn sie nach derselben Richtung, **entgegengerichtet,** wenn sie nach entgegengesetzten Richtungen zu drehen bestrebt sind.

Da, wie wir gesehen haben, die Wirkung von parallelen Kräften dieselbe bleibt, wenn man die Kräfte zu gleicher Zeit um ein und denselben Winkel dreht, so können wir uns stets die Kräfte des Kräftepaares so gedreht vorstellen, dafs der Arm zugleich die Breite ist.

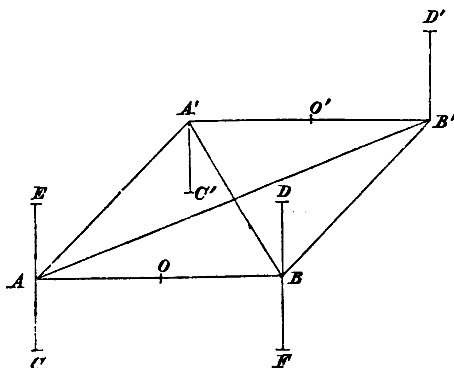
30. **Satz.** Ein Kräftepaar darf um seine Axe gedreht werden, ohne dafs seine Wirkung sich ändert.

Beweis. Es sei das Kräftepaar (AC, BD) gegeben. Drehen wir dieses um einen beliebigen Winkel AOE, so ist nach-

zuweisen, dafs (EG, FH) gleichwirkend (AC, BD) ist. Zu diesem Zwecke haben wir blofs zu zeigen, dafs beiden Kräftepaaren durch ein und dasselbe dritte Kräftepaar das Gleichgewicht gehalten wird. Bringen wir als drittes Kräftepaar (AJ, BK) an, so hält dieses dem ersten Kräftepaar direkt das Gleichgewicht. Um darzuthun, dafs dasselbe auch dem zweiten (EG, FH) das Gleichgewicht hält, setzen wir AJ und FH zu der einen Kraft R_1, und BK und EG zu der einen Kraft R_2 zusammen. Aus rein planimetrischen Gründen folgt, dafs die Richtungen von R_1 und R_2 in eine gerade Linie zusammenfallen müssen und dafs diese Gerade durch O gehen mufs. R_1 und R_2 sind nun auch gleich, da ihre Komponenten gleich sind; ferner sind sie entgegengesetzt gerichtet. Mithin heben sie sich auf.

31. **Satz.** Jedes Kräftepaar darf, ohne dafs seine Wirkung geändert wird, aus einer Ebene in eine andere ihr parallele Ebene verlegt werden.

Fig. 8.



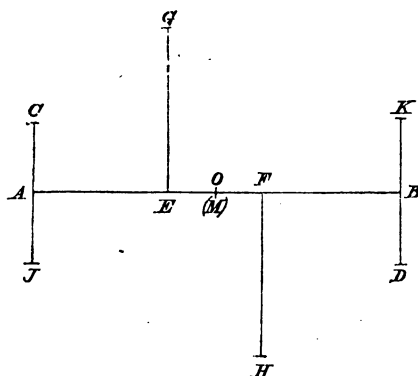
Beweis. Die Ebenen M und M' seien als parallel gegeben und in M das Kräftepaar (AC, BD). Wenn wir dasselbe nach M' als ($A'C'$, $B'D'$) verlegen, so ist der Satz

bewiesen, wenn wir gezeigt haben werden, daſs wieder den beiden Kräftepaaren durch ein und dasselbe dritte (AE, BF) das Gleichgewicht gehalten wird. (AE, BF) hält (AC, BD) direkt das Gleichgewicht. Setzen wir AE und $B'D'$ zu einer Kraft, und BF und $A'C'$ zu einer Kraft zusammen, so erhalten wir zwei Kräfte, welche völlig gleich in einer geraden Linie am Durchschnittspunkte der Diagonalen des Parallelogramms $AA'BB'$ angreifend nach entgegengesetzter Richtung wirken. Diese beiden Kräfte heben sich auf.

32. **Satz.** Kräftepaare in parallelen Ebenen sind gleichwirkend, wenn nur ihre Momente gleich sind.

Beweis. Sind in zwei parallelen Ebenen zwei Kräftepaare gegeben, deren Breiten verschieden, deren Momente

Fig. 9.



aber gleich sind, so verlegen wir das eine Kräftepaar so, daſs sein Mittelpunkt in den Mittelpunkt des anderen und seine Breite in die Breite des anderen Kräftepaares fällt. Der Satz wird bewiesen sein, wenn wir gezeigt haben werden, daſs den beiden Kräftepaaren durch ein und dasselbe

dritte das Gleichgewicht gehalten wird. Als drittes Kräftepaar bringen wir AJ, BK an. Dies hält dem ersten (AC, BD) direkt das Gleichgewicht; es erübrigt also blofs nachzuweisen, dafs auch die Kräfte EG, FH, AJ BK im Gleichgewicht sind. Die Resultante R_1 von EG und BK ist gleich $EG + BK$; ihr Angriffspunkt, welcher in der Geraden AB liegen mufs, sei M. Es mufs dann sein

$$EG : BK = BM : EM.$$

Vorausgesetzt wurde

$$EG . EF = AC . AB.$$

Es ist $\quad AC . AB = BK . AB;$

also $\quad EG . EF = BK . AB;$

daher auch $\quad EG . EO = BK . BO;$

oder $\quad EG : BK = BO : EO.$

Vorher war $\quad EG : BK = BM : EM.$

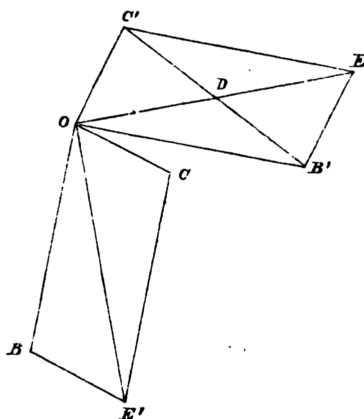
Hieraus folgt, dafs M in O fallen mufs. Ebenso setzen wir AJ und FH zusammen zu $R_2 = AJ + FH$; der Angriffspunkt von R_2 mufs ebenfalls in O fallen. R_1 und R_2 haben gleiche Gröfse, entgegengesetzte Richtungen, welche in eine Gerade fallen, und gemeinsamen Angriffspunkt; mithin heben sich R_1 und R_2 auf; also sind die Kräfte EG, FH, AJ und BK im Gleichgewicht.

34. **Satz.** Beliebig viele **Kräftepaare in parallelen Ebenen** lassen sich **zusammensetzen** zu einem Kräftepaare, dessen Ebene parallel den Ebenen und dessen Moment gleich der Summe der Momente der einzelnen Kräftepaare ist, wenn die Momente der rechtsdrehenden Kräftepaare mit positiven, diejenigen der linksdrehenden mit negativen Vorzeichen genommen sind.

35. **Zusammensetzung zweier Kräftepaare, welche nicht in parallelen Ebenen liegen.** Wir stellen beide Kräftepaare durch ihre Axen dar und verlegen die eine parallel mit sich selbst nach der anderen so hin,

dafs die Mittelpunkte in einander fallen. Es mögen dann OB und OC die beiden Kräftepaare repräsentieren. Die Ebene des durch OB repräsentierten Kräftepaares schneidet die Ebene, bestimmt durch OB und OC, in einer geraden Linie OB', welche senkrecht OB ist. In dieser Linie soll die Breite liegen; diese können wir beliebig wählen. Ich nehme $OB' = OB$. Dann werden die beiden Kräfte welche an derselben wirken, gleich 1 sein müssen; und zwar kommt bei O die Kraft $+ 1$ heraus; bei B' geht nach innen gerichtet die Kraft $- 1$ hinein. Ebenso verfahre ich mit OC. OC' wird senkrecht und gleich OC. An OC' müssen die Kräfte sein in O gleich $+ 1$, nach vorn, in C' gleich $- 1$, nach hinten wirkend.

Fig. 10.



Die beiden Kräfte $- 1$ geben zusammen die Kraft $- 2$, in dem Mittelpunkte D von $B'C'$ angreifend und nach hinten wirkend. Folglich haben wir jetzt ein Kräftepaar mit der Breite OD und den Kräften $+ 2$ und $- 2$. Sollen die Kräfte $+ 1$ und $- 1$ sein, so haben wir nur OD zu verdoppeln und wir erhalten das Kräftepaar mit den Kräften $+ 1$ und $- 1$ und der Breite OE. Dieses können wir wieder durch seine Axe darstellen; zu diesem Zwecke ziehen wir OE' senkrecht und gleich OE. OE' stellt sodann das resultierende Kräftepaar dar.

36. Verbinden wir E mit B' und C', ebenso E' mit B und C, so ist $OB'EC'$ ein Parallelogramm; ferner folgt

sofort, dafs das Viereck $OBE'C$ congruent diesem Parallelogramm ist. Daher

Satz. Der Satz vom Parallelogramm der Kräfte gilt auch von den Kräftepaaren.

Wir können die Kräftepaare auch in derselben Weise zerlegen, wie die Kräfte.

Allgemein können wir nun auch sagen

Satz. Hat man beliebig viele Kräftepaare im Raume, so kann man sie stets durch ein einziges ersetzen.

37. Sind n beliebige parallele Kräfte gegeben, und ergiebt sich, dafs $R = \Sigma P = 0$ ist, ohne dafs ΣPx und $\Sigma Py = 0$ sind, dann haben die Kräfte nicht eine einzige Resultante, sondern reducieren sich auf ein Kräftepaar, dessen komponierende Paare in den Ebenen der zx und zy liegen und bez. die Momente ΣPx und ΣPy haben.

C) Gleichgewicht paralleler Kräfte.

38. Wir nehmen die z-Axe des räumlichen rechtwinkligen Coordinatensystems wieder parallel mit den n gegebenen Kräften und bezeichnen mit P eine beliebige dieser n parallelen Kräfte und mit x, y, z die Coordinaten des Angriffspunktes von P. Der Zustand des Systems wird nun nicht geändert, wenn wir im Coordinatenanfange O zwei gleiche einander direkt entgegengesetzt gerichtete Kräfte anbringen, deren jede parallel und gleich P ist. Verfahren wir so in Beziehung auf jede der n gegebenen Kräfte, so werden aus diesen n Kräften 1) n Kräfte, welche im Coordinatenanfang angreifend parallel und gleich den gegebenen sind; 2) n Kräftepaare, deren jedes als Arm die starre Verbindungsgerade von O mit einem der Angriffspunkte der gegebenen Kräfte hat, wo die eine Kraft jedesmal eine der gegebenen ist, und deren jedes in einer durch die z-Axe

gehenden Ebene wirkt. Soll das System im Gleichgewicht sein, so mufs erstens die Resultante der n Kräfte, welche im Coordinatenanfange angreifen, gleich Null sein, d. h.

$$R = \Sigma P = 0.$$

Zweitens mufs für den Fall des Gleichgewichts das Moment des resultierenden Kräftepaares gleich Null sein. Das Moment jedes der n Kräftepaare ist von der Form $P\sqrt{x^2 + y^2}$. Nun läfst sich jedes dieser Kräftepaare zerlegen in zwei andere, welche in den Ebenen der zx und zy parallel den Richtungen der ersten Paare wirken und deren Momente bez. von der Form sind $P_n x_n$ und $P_n y_n$. Das Moment des resultierenden Kräftepaares wird sein

$$\sqrt{(\Sigma Px)^2 + (\Sigma Py)^2}$$

Für den Fall des Gleichgewichts mufs also sein

$$\Sigma Px = 0; \text{ und } \Sigma Py = 0.$$

Die drei Gleichungen $\Sigma P = 0$; $\Sigma Px = 0$; $\Sigma Py = 0$ enthalten vollständig die Bedingungen für das Gleichgewicht der n parallelen Kräfte.

Die erste Gleichung drückt aus, dafs die Summe der gegebenen Kräfte gleich Null sein mufs; die beiden anderen Gleichungen drücken aus, dafs die Summe der Momente der Kräfte in Beziehung auf zwei senkrecht auf ihren Richtungen stehende Axen gleich Null sein mufs. Wenn dies für zwei beliebige auf den Richtungen der Kräfte senkrechte, aber unter sich nicht parallele Axen der Fall ist, so ist es auch für jede dritte gleichfalls auf diesen Richtungen senkrecht stehende Axe der Fall.

39. Wenn $R = 0$ ist, ohne dafs zugleich ΣPx und $\Sigma Py = 0$ sind, so haben die n Kräfte nicht eine einzige Resultante, sondern reducieren sich auf ein Kräftepaar, dessen komponierende Paare in den Ebenen der zx und zy liegen und bez. die Momente ΣPx und ΣPy haben.

40. Ist das System der materiellen Punkte nicht vollkommen frei, sondern ist in demselben ein fester Punkt vorhanden, und haben die parallelen Kräfte eine bestimmte Resultante, so ist für den Fall des Gleichgewichts hinreichend, dafs die Resultante durch den festen Punkt geht. Die Gröfse der Resultante kommt hierbei gar nicht in Betracht.

Sind zwei feste Punkte in dem System vorhanden, so kann das System sich nur noch um die starre Verbindungsgerade der zwei festen Punkte als feste Axe drehen. In diesem Falle ist, damit Gleichgewicht stattfinden soll, nur erforderlich, dafs die Resultante der gegebenen Kräfte durch diese feste Axe geht.

Sind drei feste Punkte in dem System vorhanden, welche nicht in einer geraden Linie liegen, so ist das ganze System fest; d. h. es ist stets Gleichgewicht vorhanden.

IV.

Zusammensetzung und Gleichgewicht beliebiger Kräfte, welche an einem starren Punktsystem wirken.

A) Zusammensetzung beliebiger Kräfte.

41. Es seien n beliebige Kräfte gegeben. Wir nehmen ein rechtwinkliges, sonst aber beliebig im Raume liegendes Coordinatensystem mit dem Anfangspunkte O an. Der Zustand des gesamten Systems wird nicht geändert, wenn wir wieder im Coordinatenursprung O je zwei einander gleiche Kräfte anbringen, deren jede gleich und parallel den einzelnen gegebenen Kräften ist. Hierdurch werden die sämtlichen ursprünglich gegebenen n Kräfte ersetzt durch

1) n Kräfte, welche im Coordinatenursprung angreifen und parallel und gleich den gegebenen Kräften sind.

2) n Kräftepaare, deren jedes als Arm die starre Verbindungsgerade zwischen dem Coordinatenanfang und dem Angriffspunkt je einer der gegebenen Kräfte hat und bei welchen eine Kraft jedes Paares eine von den gegebenen Kräften ist.

Es lassen sich also beliebig viele Kräfte, welche an einem starren Punktsystem wirken, im allgemeinen zu einer Kraft R und einem Kräftepaar K zusammensetzen. Die Kraft R repräsentiert die fortschreitende, das Kräftepaar K die drehende Bewegung des Systems. Da man nun stets noch die Kraft R mit einer Kraft des Kräftepaares K zusammensetzen kann, so kann man auch sagen, dafs sich beliebig viele Kräfte, welche an einem starren Punktsystem wirken, immer zu zwei resultierenden Kräften vereinigen lassen. Für den Fall, dafs die Richtung der Kraft R parallel der Ebene des Kräftepaares K ist, lassen sich Kraft und Kräftepaar in eine Kraft verwandeln.

42. P bezeichne irgend eine der gegebenen n Kräfte; ihr Angriffspunkt habe die Coordinaten x, y, z und die Winkel, welche P mit den Coordinatenaxen bildet, seien α, β, γ. Bezeichnen wir noch die Winkel, welche die resultierende Kraft R mit der x-, y- und z-Axe bildet, bez. mit a, b und c und setzen wir wie früher

$$X = \Sigma P \cos\alpha;\quad Y = \Sigma P \cos\beta;\quad Z = \Sigma P \cos\gamma;$$

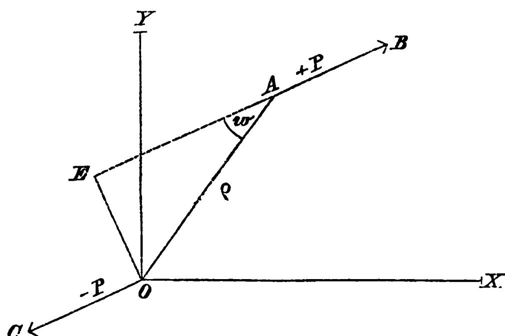
so ist R der Gröfse und Richtung nach bestimmt durch die Gleichungen

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2};\quad \cos a = \frac{X}{R};\quad \cos b = \frac{Y}{R};\quad \cos c = \frac{Z}{R}.$$

43. Wir haben nun das resultierende Kräftepaar K zu bestimmen. Zu diesem Zwecke bestimmen wir zunächst Axenrichtung und Moment irgend eines der n Kräftepaare (CO, AB), gebildet durch $+P$ und $-P$, wirkend am Arme ϱ.

Ist die Richtung der Axe bekannt, so ist zugleich die Ebene des Kräftepaares bekannt, da diese senkrecht zur Axe ist. Die Axe des Kräftepaares bilde mit der x-, y-

Fig. 11.



und z-Axe bez. die Winkel φ, ψ, χ. Da die Axe senkrecht sowohl auf $AB = P$, als auch auf $OA = \varrho$ steht, so ist

$$\cos\alpha\cos\varphi + \cos\beta\cos\psi + \cos\gamma\cos\chi = 0;$$

und

$$\frac{x}{\varrho}\cos\varphi + \frac{y}{\varrho}\cos\psi + \frac{z}{\varrho}\cos\chi = 0;$$

oder

$$x\cos\varphi + y\cos\psi + z\cos\chi = 0.$$

Ferner ist

$$\cos^2\varphi + \cos^2\psi + \cos^2\chi = 1.$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt

$$\cos\varphi = \frac{y\cos\gamma - z\cos\beta}{W}; \quad \cos\psi = \frac{z\cos\alpha - x\cos\gamma}{W};$$

$$\cos\chi = \frac{x\cos\beta - y\cos\alpha}{W};$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$W = \sqrt{(y\cos\gamma - z\cos\beta)^2 + (z\cos\alpha - x\cos\gamma)^2 + (x\cos\beta - y\cos\alpha^2)}.$$

Sodann bestimmen wir das Moment des Kräftepaares (CO, AB). Die Breite des Kräftepaares ist, wenn wir $EAO = w$ setzen, $\varrho \sin w$; folglich ist das Moment des Kräftepaares $P.\varrho \sin w$. Hierin ist nun $\varrho \sin w$ durch die Gröfsen, welche gegeben sind, nämlich durch x, y, z, α, β, γ auszudrücken. Es ist

$$\varrho^2 \sin^2 w = \varrho^2 - \varrho^2 \cos^2 w;$$

$$\cos w = \frac{x \cos \alpha}{\varrho} + \frac{y \cos \beta}{\varrho} + \frac{z \cos \gamma}{\varrho};$$

also $\varrho^2 \cos^2 w = (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2$, folglich $\varrho^2 \sin^2 w = x^2 + y^2 + z^2 - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2$.

Da $(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = 1$ als Faktor nichts ändert, können wir schreiben

$$\varrho^2 \sin^2 w = (x^2 + y^2 + z^2)(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2.$$

Zerlegen wir die rechte Seite nach der allgemeinen Formel

$$(BC' - B'C)^2 + (CA' - C'A)^2 + (AB' - A'B)^2 = (A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2) - (AA' + BB' + CC'),$$

so wird

$$\varrho^2 \sin^2 w = (y \cos \gamma - z \cos \beta)^2 + (z \cos \alpha - x \cos \gamma)^2 + (x \cos \beta - y \cos \alpha)^2 = W^2.$$

Mithin ist das Moment des Kräftepaares (CO, AB) gleich $P . W$.

Wir können das Kräftepaar (CO, AB) zerlegen in drei Kräftepaare, welche in den drei Coordinatenebenen wirken. Die Momente derselben sind dann

$$PW.\cos \varphi; \quad PW.\cos \psi; \quad PW.\cos \chi.$$

Setzen wir die früheren Werte von $\cos \varphi$, $\cos \psi$ und $\cos \chi$ ein, so erhalten wir als Moment des in der zy-Ebene wirkenden Kräftepaares $P\,(y \cos \gamma - z \cos \beta)$; als Moment des in der zx-Ebene wirkenden Kräftepaares $P(z \cos \alpha - x \cos \gamma)$; und als Moment des in der xy-Ebene wirkenden Kräftepaares $P\,(x \cos \beta - y \cos \alpha)$.

$$\eta = \frac{\frac{4}{3} r^3 \pi}{2\pi \frac{r^2 \pi}{2}} = \frac{4r}{3\pi}.$$

58. **Aufgabe.** Wo liegt der Schwerpunkt eines homogenen Kreisausschnittes vom Radius r und dem Centriwinkel γ?

Lösung. Man nimmt das Kreiscentrum als Pol und die Halbierungslinie von γ als Axe des Coordinatensystems Dann ist $\eta = o$; und ξ, der Abstand vom Mittelpunkte ergiebt sich nach 56 a, β aus

$$F\xi = \frac{1}{3} \int_{-\frac{\gamma}{2}}^{+\frac{\gamma}{2}} r^3 \cos \varphi \, d\varphi.$$

Es wird

$$F\xi = \frac{2}{3} r^3 \sin \frac{\gamma}{2};$$

daher

$$\xi = \frac{4}{3} r \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\gamma}.$$

Für den Halbkreis wird auch hieraus

$$\xi = \frac{4r}{3\pi};$$

und für den Quadraten wird $\xi = \frac{4\sqrt{2}}{2\pi} \cdot r$.

59. **Aufgabe.** Wo liegt der Schwerpunkt (ξ, η, ζ) der homogenen Oberfläche des Rotationskegels, dessen Höhe h und dessen Basiusradius r ist.

Lösung. Legt man das rechtwinklige Coordinatensystem so, dass der Anfangspunkt in die Spitze des Kegels und die x-Axe in die Axe des Kegels fällt, so ist natürlich $\eta = \zeta = o$.

ξ ist bestimmt durch

$$F\xi = 2\pi \int_{x=o}^{x=h} xz \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Es ist nun $x:h = z:r$; und hieraus

$$z = \frac{rx}{h};\ \frac{dz}{dx} = \frac{r}{h};\ \text{also}$$

$$F\xi = 2\pi \int_o^h \frac{x\,.\,rx\sqrt{r^2+h^2}}{h^2}\, dx = \frac{2r\pi\sqrt{r^2+h^2}}{h^2} \int_o^h x^2\, dx$$

oder $F\xi = \frac{2rh\pi\sqrt{r^2+h^2}}{3}$; und da

$$F = r\pi\sqrt{r^2+h^2}\ \text{ist, so ist}$$

$$\xi = \frac{2}{3}\, h.$$

60. **Aufgabe.** Wo liegt der Schwerpunkt der homogenen Oberfläche eines Kugelabschnitts, wenn der Kugelradius r und der Abstand der Begrenzungsebene vom Kugelmittelpunkte d ist?

Lösung. Legt man das rechtwinklige Coordinatensystem so, dass der Kugelmittelpunkt Coordinatenanfang ist und dass die x-Axe in die Senkrechte vom Kugelmittelpunkte auf die Begrenzungsebene fällt, so ist offenbar wieder $\eta = \zeta = o$; und ξ folgt aus

$$F\xi = 2\pi \int_{x=d}^{x=r} xz \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx;$$

worin $z = \sqrt{r^2-x^2}$ und $\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}$ zu setzen ist.

Es wird

$$F\xi = 2r\pi \int_o^r x\,dx = r\pi\ (r^2-d^2);$$

und da $F = 2\pi \int_0^r z\,dx = 2r\pi\ (r-d)$ ist, so ist

$$\xi = \frac{1}{2}(r+d).$$

Für die Halbkugel: $\xi = \frac{r}{2}$.

C) Bestimmung des Schwerpunktes von Körpern.

61. Allgemeine Formeln. Es bezeichnen ξ, η, ζ die Schwerpunktscoordinaten des Körpers, welche auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen sind. p sei das Gewicht der Volumeneinheit; V das Volumen und P das Gewicht des Körpers; x, y, z seien die Coordinaten eines beliebigen Oberflächenpunktes.

a) Rotationskörper.

Denkt man sich das Volumen V des Rotationskörperquadranten $FHGILK$ (Fig. 12) durch Ebenen parallel der yz-Ebene im Abstande dx von einander, und durch Ebenen parallel der xz-Ebene im Abstande dy von einander in stabförmige Elemente, parallel der z-Axe zerlegt, so ist das Volumen eines solchen Elementes ausgedrückt durch $dx\,.\,dy\,\sqrt{y_1^2-y^2}$; wo y_1 aus der Gleichung der Curve $GD: y_1 = f(x)$ folgt.

ξ, η, ζ sind nun unter der Voraussetzung, dass der Körper homogen ist, bestimmt durch die Gleichungen

$$V\xi = \int_{x_0}^{x_1}\int_0^{y_1} x\sqrt{y_1^2-y^2}\,dx\,dy;$$

$$V\eta = V\zeta = \int_{x_0}^{x_1}\int_0^{y_1} y\sqrt{y_1^2-y^2}\,dx\,dy;$$

wo $V = \int_{x_0}^{x_1}\int_0^{y_1}\sqrt{y_1^2-y^2}\,dx\,dy$ ist.

Die Integrationen in Bezug auf y kann man ausführen und erhält dann

$$V\xi = \frac{\pi}{4}\int_{x_0}^{x_1} x y_1^2 dx; \quad V\eta = V\zeta = \frac{1}{3}\int_{x_0}^{x_1} y_1^3 dx;$$

$$\text{wo } V = \frac{\pi}{4}\int_{x_0}^{x_1} y_1^2\, dx \text{ ist.}$$

b) Beliebige Körper.

Zerschneidet man das Volumen des Körpers durch Ebenen parallel den drei Coordinatenebenen, und die einzelnen parallelen Ebenen im Abstande bez. dx, dy, dz von einander gelegt, in parallelopipedische Elemente, so wird eines dieser ausgedrückt durch $dx\,.\,dy\,.\,dz$.

α. Ist der Körper auf rechtwinklige Coordinaten bezogen, so ist,
wenn p veränderlich ist,

$$P\xi = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} p\, x\, dx\, dy\, dz;$$

$$P\eta = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} py\, dx\, dy\, dz;$$

$$P\zeta = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} pz\, dx\, dy\, dz;$$

$$\text{wo } P = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} pdx\, dy\, dz \text{ ist.}$$

Wenn p constant ist, ist

$$V\xi = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} x\, dx\, dy\, dz;$$

$$V\eta = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} y\, dx\, dy\, dz;$$

$$V\zeta = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} z\, dx\, dy\, dz;$$

$$\text{wo } V = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} dx\, dy\, dz \text{ ist.}$$

Die Integration in Bezug auf z ist hier ausführbar; daher wird einfacher

$$V\xi = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} x\,(z_1 - z_0)\,dx\,dy;$$

$$V\eta = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} y\,(z_1 - z_0)\,dx\,dy;$$

$$V\zeta = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} (z_1^2 - z_0^2)\,dx\,dy;$$

$$\text{wo } V = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} (z_1 - z_0)\,dx\,dy \text{ ist.}$$

Diese Formeln erhält man auch sofort, wenn man sich den homogenen Körper von vorn herein in nur stabförmige Elemente zerlegt denkt.

β) Ist der Körper auf Polarcoordinaten bezogen und bezeichnet r den Radiusvector eines beliebigen Punktes mit den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z; φ den Winkel zwischen Radiusvector und x-Axe, w den Winkel, unter welchem die durch r und die x-Axe gelegte Ebene gegen die xy-Ebene geneigt ist, so gelten die Beziehungen

$$x = r\cos\varphi;\quad y = r\sin\varphi\cos w;\quad z = r\sin\varphi\sin w;$$
$$dx\,dy\,dz = r^2\sin\varphi\,d\varphi\,dw\,dr.$$

Diese Werte in die Gleichungen unter α eingesetzt, giebt für veränderliches p:

$$P\xi = \frac{1}{2}\int_{w_0}^{w_1}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1} pr^3 \sin 2\varphi\,d\,w\,d\varphi\,dr;$$

$$P\eta = \int_{w_0}^{w_1}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1} pr^3 \sin^2\varphi\cos w\,dw\,d\varphi\,dr;$$

$$P\zeta = \int_{w_0}^{w_1}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1} pr^3 \sin^2\varphi\sin w\,dw\,d\varphi\,dr;$$

$$\text{wo } P = \int_{w_0}^{w_1}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1} pr^2 \sin\varphi\,dw\,d\varphi\,dr$$

ist und sich die Integrationsgrenzen aus der Natur der Körperbegrenzungen ergeben.

Wenn p constant ist, wird einfacher

$$V\xi = \frac{1}{8}\int_{w_0}^{w_1}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (r_1^4 - r_0^4) \sin 2\varphi \, dw \, d\varphi;$$

$$V\eta = \frac{1}{4}\int_{w_0}^{w_1}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (r_1^4 - r_0^4) \sin^2\varphi \cos w \, dw \, d\varphi;$$

$$V\zeta = \frac{1}{4}\int_{w_0}^{w_1}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (r_1^4 - r_0^4) \sin^2\varphi \sin w \, dw \, d\varphi;$$

$$\text{wo } V = \frac{1}{3}\int_{w_0}^{w_1}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (r_1^3 - r_0^3) \sin\varphi \, dw \, d\varphi \text{ ist.}$$

62. **Aufgabe.** Wo liegt der Schwerpunkt des Volumens V des homogenen Rotationskegels, dessen Höhe gleich h und dessen Grundflächenradius gleich r ist?

Lösung. Legt man das rechtwinklige Coordinatensystem so, wie in 57, so ist natürlich $\eta = \zeta = o$; und ξ ergiebt sich aus

$$V\xi = \pi \int_o^h x \, y_1^2 \, dx.$$

Es ist wieder

$$x : h = y_1 : r; \text{ also } y_1 = \frac{rx}{h};$$

$$\text{mithin } V\xi = \frac{r^2\pi}{h^2}\int_o^h x^3 \, dx = \frac{r^3\pi}{h^2} \cdot \frac{h^4}{4} = \frac{r^2h^2\pi}{4};$$

$$\text{und folglich da } V = \frac{r^2\pi h}{3} \text{ ist, so ist } \xi = \frac{3}{4}\,h.$$

63. **Aufgabe.** Wo liegt der Schwerpunkt des Volumens des homogenen Kugelabschnitts, wenn der Kugelradius r und der senkrechte Abstand der Kreisebene vom Mittelpunkte der Kugel gleich d ist?

Lösung. Das rechtwinklige Coordinatensystem liegt wie in 58. Sodann ist natürlich $\eta = \zeta = o$; ξ wird bestimmt durch

$$V\xi = \pi \int_0^r x\,(r^2 - x^2)\,dx.$$

Hieraus folgt mit Leichtigkeit

$$\xi = \frac{3}{4} \cdot \frac{(r^2 - d^2)^2}{2r^3 - 3r^2 d + d^3}$$

Bezeichnet man den Radius der Kreisebene, welche den Kugelabschnitt begrenzt, mit ϱ, so ist

$$\xi = \frac{3}{4} \cdot \frac{\varrho^4}{2r^3 - 3r^2 d + d^3}$$

Für die Halbkugel wird

$$\xi = \frac{3}{8}\,r.$$

64. **Aufgabe.** Eine gerade Pyramide von der Höhe h hat als Grundfläche ein Quadrat mit der Seitenlänge $h\sqrt{2}$ Die Dichtigkeit derselben ist proportional dem Quadrate des Abstandes von dem Mittelpunkte dieser Grundfläche; in der Entfernung 1 von diesem ist das Gewicht der Volumeneinheit gleich k. Man sucht die Lage des Schwerpunktes ξ, η, ζ.

Lösung. Jedenfalls liegt der Schwerpunkt auf der Mittellinie der Pyramide. Nimmt man also die eine Basisdiagonale als x-Axe, die andere als y-Axe, so dass die Mittellinie zur z-Axe wird, so handelt es sich nur noch um die Bestimmung von ζ. Der Abstand eines beliebigen Punktes xyz der Pyramide ist vom Coordinatenanfange $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Wird mit P das Gewicht des vierten Teiles der Pyramide bezeichnet, so ist ζ bestimmt durch

$$4\,P\zeta = k \int_{-x}^{+x} \int_{-y}^{+y} \int_{-o}^{+z} (x^2 + y^2 + z^2)\,z\,dx\,dy\,dz;$$

oder $$4\,P\zeta = 4\,k^2 \int_o^x \int_o^y \int_o^z (x^2 + y^2 + z^2)\,z\,dx\,dy\,dz;$$

oder $$P\zeta = k \int_o^x \int_o^y \int_o^z (x^2 + y^2 + z^2)\,z\,dx\,dy\,dz.$$

Der obere Grenzwert z folgt aus der Gleichung für die Ebene

$$\frac{x}{h} + \frac{y}{h} + \frac{z}{h} = 1;$$

als
$$z = h - x - y;$$
der obere Grenzwert y ergiebt sich
als
$$y = h - x; \text{ also}$$

$$P\zeta = k \int_0^x \int_0^{h-x} \int_0^{h-x-y} (x^2 + y^2 + z^2)\, z\, dx\, dy\, dz$$

Mit Leichtigkeit folgt hieraus

$$P\zeta = \frac{1}{180} kh^6;$$

es ist nun weiter

$$P = k \int_0^x \int_0^{h-x} \int_0^{h-x-y} (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$$
$$= \frac{1}{20} kh^5.$$

Mithin ist

$$\zeta = \frac{1}{9} h.$$

65. **Aufgabe.** Ein homogener Kugelsector hat den Radius a und den Centriwinkel 2γ. Man soll unter Anwendung von Polarcoordinaten die Lage seines Schwerpunktes (ξ, η, ζ) ermitteln.

Lösung. Da der Schwerpunkt auf der Mittellinie des Sectors liegt, so ist, wenn man diese als x-Axe und den Mittelpunkt der Kugel als Pol annimmt, $\eta = \zeta = o$. ξ wird bestimmt durch die Gleichungen

$$V\xi = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^{\gamma} a^4 \sin\varphi \cos\varphi \, dw\, d\varphi$$

$$V = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\gamma} a^3 \sin\varphi \, dw\, d\varphi;$$

hieraus folgt

$$V\xi = \frac{1}{4}\pi a^4 \sin^2\gamma;$$

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3 \sin\frac{\gamma}{2}$$

Mithin ist

$$\xi = \frac{3}{4} a \cos^2\frac{\gamma}{2}.$$

Für die Halbkugel hat man wieder $\xi = \frac{3}{8} a.$

66. **Allgemeiner Satz über den Schwerpunkt.** Sind die einzelnen Massen eines Körpers oder auch eines Systems von Körpern $m, m', m'', \ldots\ldots$ und sind die Coordinaten der Schwerpunkte dieser einzelnen Massen bez. $x, y, z;\ x', y', z';\ x'', y'', z'';\ \ldots\ldots$ so hat der Schwerpunkt des gesamten Systems (ξ, η, ζ) die Eigenschaft, dafs die Summe der Produkte der einzelnen Massenteilchen in das Quadrat des bez. Abstandes vom Schwerpunkte des Systems ein Minimum wird.

Beweis. Nehmen wir ein räumliches rechtwinkliges, sonst aber beliebiges Coordinatensystem an, und sei ξ', η', ζ' ein beliebiger Punkt, so ist nachzuweisen, dafs die Differenz

$$\Sigma m[(x-\xi')^2+(y-\eta')^2+(z-\zeta')^2] = \Sigma m[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+ (z-\zeta)^2]$$

positiv ist. Wir können sofort für diese Differenz schreiben:

$$\begin{aligned}\Sigma m[(x-\xi')^2&+(y-\eta')^2+(z-\zeta')^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-(z-\zeta)^2]\\ &= -2(\xi'-\xi)\Sigma mx - 2(\eta'-\eta)\Sigma my - 2(\zeta'-\zeta)\Sigma mz\\ &\quad + [(\xi'^2-\xi^2)+(\eta'^2-\eta^2)+(\zeta'^2-\zeta^2)]\ \Sigma m\\ &= -2(\xi'-\xi)M\xi - 2(\eta'-\eta)M\eta - 2(\zeta'-\zeta)M\zeta\\ &\quad + [(\xi'^2-\xi^2)+(\eta'^2-\eta^2)+(\zeta'^2-\zeta^2)]\ M;\end{aligned}$$

wenn M die Masse des ganzen Körpersystems bezeichnet. Dieser letzte Ausdruck geht noch über in

$$M(-2\xi\xi'+\xi^2+\xi'^2-2\eta\eta'+\eta^2+\eta'^2-2\zeta\zeta'+\zeta^2+\zeta'^2);$$

oder endlich

$$\Sigma m[(x-\xi')^2+(y-\eta')^2+(z-\zeta')^2]-\Sigma m[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]=M[(\xi'-\xi)^2+(\eta'-\eta)^2+(\zeta'-\zeta)^2].$$

Hieraus ist ersichtlich, dafs die Differenz der beiden betreffenden Summen stets positiv ist.

VI.

Von der Anziehung auf einen Punkt.

67. Zwei Punkte, welche die Massen m und m_1 haben, üben, wenn die Anziehung proportional der Masse und irgend einer Funktion der Entfernung r vorausgesetzt wird, die Wirkung

$$kmm_1\ F(r)$$

auf einander aus.

Hat der eine der Punkte die Masse 1, der andere die Masse m und wird die Anziehung umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung angenommen, so ist die Wirkung, welche der erste Punkt vom zweiten erleidet

$$\frac{km}{r^2}.$$

k ist der Anziehungscoefficient; man versteht also unter diesem diejenige Anziehung, welche die Masse 1 auf die Masse 1 in der Entfernung 1 ausübt.

71. Es sei nun ganz allgemein ein Körper von der Masse m gegeben, welcher auf einen beliebig im Raume gelegenen materiellen Punkt P, der die Coordinaten x, y, z in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem hat, eine Anziehung ausübt. Denkt man sich die Masse m in unendlich kleine Teilchen zerlegt und ist die Entfernung eines solchen Elementes dm von dem angezogenen Punkte r, so

werde noch vorausgesetzt, dafs die Anziehung von dm irgend eine Funktion von r sei und dafs sie auch abhängig sei von dem Massenteilchen.

Die Gesamtanziehung der Masse m auf den Punkt P, welche mit A bezeichnet werden möge, setzt sich zusammen aus einer Menge einzelner Kräfte, nämlich derjenigen, welche alle Massenelemente auf den Punkt ausüben.

Die Coordinaten eines Massenelementes seien x', y', z'; diese sind also veränderlich, während x, y, z als die Coordinaten des angezogenen Punktes konstant sind.

Die Intensität der Kraft, welche dm in der Richtung r auf den Punkt ausübt, wird ausgedrückt durch $dm\ F(r)$. Bildet die Gerade r mit der x-, y- und z-Axe bez. die Winkel α, β, γ, so sind die drei Komponenten der Kraft $dm\ F(r)$ in der Richtung der drei Coordinatenaxen

$$dm\ F(r) \cos\alpha = dm\ F(r) \frac{x'-x}{r};$$

$$dm\ F(r) \cos\beta = dm\ F(r) \frac{y'-y}{r};$$

$$dm\ F(r) \cos\gamma = dm\ F(r) \frac{z'-z}{r}.$$

Demnach werden die drei Komponenten der Gesamtanziehung in der Richtung der drei Axen sich darstellen als

$$X = \int dm\ F(r) \frac{x'-x}{r};$$

$$Y = \int dm\ F(r) \frac{y'-y}{r};$$

$$Z = \int dm\ F(r) \frac{z'-z}{r}.$$

Es ist nun

$$r^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2.$$

Durch partielle Differentiation nach x, y und z ergiebt sich bez.

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x'-x}{r};$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{y'-y}{r};$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{z'-z}{r}.$$

Daher wird nun

$$X = -\int dm\, F(r) \frac{\partial r}{\partial x};$$

$$Y = -\int dm\, F(r) \frac{\partial r}{\partial y};$$

$$Z = -\int dm\, F(r) \frac{\partial r}{\partial z}.$$

Setzen wir nun

$$\int F(r)\,\partial r = -\varphi(r);$$

dann würde sein

$$F(r)\,\partial r = -\partial\varphi(r);$$

also

$$\frac{F(r)\partial r}{\partial x} = -\frac{\partial\varphi(r)}{\partial x};$$

$$\frac{F(r)\,\partial r}{\partial y} = -\frac{\partial\varphi(r)}{\partial y};$$

$$\frac{F(r)\,\partial r}{\partial z} = -\frac{\partial\varphi(r)}{\partial z}.$$

Diese Werte in die Formeln für X, Y, Z eingesetzt, giebt

$$X = \int dm\, \frac{\partial\varphi(r)}{\partial x};$$

$$Y = \int dm\, \frac{\partial\varphi(r)}{\partial y};$$

$$Z = \int dm\, \frac{\partial\varphi(r)}{\partial z}.$$

Führen wir noch die Bezeichnung ein

$$\int dm\, \varphi(r) = V,$$

so hat man einfach

$$X = \frac{\partial V}{\partial x};$$

$$Y = \frac{\partial V}{\partial y};$$

$$Z = \frac{\partial V}{\partial z};$$

d. h. die drei Komponenten der Gesamtanziehung sind die drei partiellen Differentialquotienten ein und derselben Funktion. Die Funktion V heifst das Potential der Masse m in Beziehung auf den Punkt (xyz).

Die Gesamtanziehung R ist nun

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Die Winkel a, b, c, welche R mit den Coordinatenaxen bildet, sind

$$\cos a = \frac{X}{R};\ \cos b = \frac{Y}{R};\ \cos c = \frac{Z}{R}.$$

Hierdurch ist die Gesamtanziehung des Körpers auf den Punkt der Gröfse und Richtung nach bestimmt.

Die vorkommenden Integrale werden meistens dreifache sein; die Grenzen der Integrationen ergeben sich aus der Natur des gerade vorliegenden Körpers.

Man spricht nun nicht blofs von der Anziehung der Körper, sondern auch von der Anziehung der Flächen und der Linien, zu welchen letzteren auch der Draht gezählt wird.

A) Anziehung der Linien.

68. **Aufgabe.** Eine gerade Linie AB von der Länge l wirkt anziehend auf einen Punkt D von der Masse 1, welcher aufserhalb der Richtung der Geraden im senkrechten Abstande y von dieser sich befindet. Es soll die Gröfse und

Richtung der Anziehung R gesucht werden, wenn letztere nach dem Newton'schen Gesetze erfolgt.

Lösung. Man lege das rechtwinklige Coordinatensystem so, dafs der eine Endpunkt der Geraden Coordinatenursprung und die Gerade selbst x-Axe ist. In Bezug auf dieses System habe der angezogene Punkt die Coordinaten x und y. Ein beliebiges Massenteilchen der Linie dx' habe von D die Entfernung r. Es ist $F(r)=\frac{\mu}{r^2}$; also $\int F(r)\,dr=\int\frac{\mu\,dr}{r^2}$ $=-\frac{\mu}{r}$; also $\varphi(r)=\frac{\mu}{r}$; folglich

$$V=\mu\int_0^l\frac{dx'}{r^2};\text{ oder da } r^2=(x-x')^2+y^2 \text{ ist,}$$

$$V=\mu\int_0^l\frac{dx'}{\sqrt{(x-x')^2+y^2}}.$$

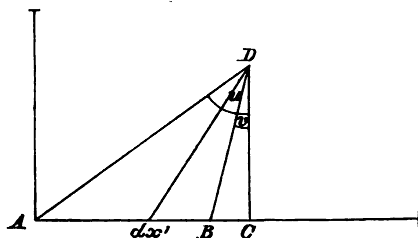
Mit Hülfe der Substitution

$$x-x'=ty,$$

erhält man

$$V=-\mu\int_{\frac{x}{y}}^{\frac{x-l}{y}}\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}};$$

Fig. 14.



oder

$$V = -\mu l \frac{\sqrt{(x-l)^2 + y^2} + x - l}{\sqrt{x^2+y^2}+x}.$$

Daher wird

$$X = \frac{\partial V}{\partial x} = -\mu \left(\frac{1}{\sqrt{(x-l)^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right);$$

ebenso wird

$$Y = \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\mu}{y} \left(-\frac{x-l}{\sqrt{(x-l)^2+y^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right).$$

Es ist nun

$$\sqrt{(x-l)^2 + y^2} = DB = \frac{y}{\cos v}; \quad \sqrt{x^2+y^2} = DA = \frac{y}{\cos u};$$

$$\frac{x-l}{DB} = \sin v; \; \frac{x}{DA} = \sin u.$$

Folglich

$$X = -\frac{\mu}{y}\cos v + \frac{\mu}{y}\cos u = -\frac{\mu}{y}(\cos v - \cos u);$$

$$Y = +\frac{\mu}{y}\sin v - \frac{\mu}{y}\sin u = \frac{\mu}{y}(\sin v - \sin u);$$

oder

$$X = -\frac{2\mu}{y}\sin\frac{u-v}{2}\sin\frac{u+v}{2};$$

$$Y = -\frac{2\mu}{y}\sin\frac{u-v}{2}\cos\frac{u+v}{2}.$$

Somit wird

$$R = \frac{2\mu}{y}\sin\frac{u-v}{2};$$

und wenn a der Winkel ist, welchen die Richtung von R mit der Geraden bildet, so ist

$$tga = \frac{Y}{X}; \text{ oder } tga = cotg\,\frac{u+v}{2}.$$

Wird $l = \infty$, dann wird $u = 90^0$; und $v = -90^0$; also $tga = \infty$, d. h. $a = \text{R}$; die Richtung von R ist senk-

recht zu der Geraden; und R wird gleich $\frac{2\mu}{y}$, d. h. die Resultante ist umgekehrt proportional der Entfernung des Punktes von der Geraden.

6. **Aufgabe.** Ein Draht hat die Gestalt einer Kreislinie, deren Radius ϱ ist. Die Dichtigkeit ε und der Querschnitt q des Drahtes sind konstant. Über dem Mittelpunkte O der Kreislinie liegt ein Punkt P in dem senkrecht zur Kreisebene gemessenen Abstande h. Seine Masse ist gleich 1. Er erleidet von der Kreislinie eine Anziehung nach dem Newton'schen Gesetze. Wie grofs ist dieselbe?

Lösung. Denkt man sich P mit O und einem Peripheriepunkte verbunden und bezeichnet den so entstandenen Winkel mit γ, so ergiebt sich ohne weitere Rechnung

$$Z = 2\varrho\pi q\varepsilon \frac{\mu}{r^2} \cos\gamma;$$

oder

$$Z = 2\varrho\pi q\varepsilon \frac{\mu}{r^2} \cdot \frac{h}{r};$$

oder

da $r = \sqrt{h^2 + \varrho^2}$ ist,

$$Z = 2\pi \frac{\varrho r h q \varepsilon}{(\sqrt{h^2+\varrho^2})^3};$$

oder wenn mit m die Masse des Kreisdrahtes bezeichnet wird,

$$Z = \frac{\mu h m}{(\sqrt{h^2+\varrho^2})^3}.$$

B) Anziehung der Flächen.

70. **Aufgabe.** Wie grofs ist die Anziehung Z, welche eine homogene Kreisfläche vom Radius ϱ nach dem Newton'schen Gesetze auf einen materiellen Punkt P ausübt, der senkrecht über ihrem Mittelpunkt O in der Entfernung h liegt?

Lösung. Das rechtwinklige Coordinatensystem sei so gelegt, daſs der Kreismittelpunkt Coordinatenanfang und die Gerade OP die z-Axe ist. Denkt man sich die Kreisfläche in unendlich schmale konzentrische Kreisringe zerteilt, so ist der Flächeninhalt eines dieser mit dem Radius ϱ' gleich $2\varrho'\pi d\varrho'$. Die Anziehung dieses einen Ringes auf den Punkt wird ausgedrückt durch

$$\mu \cdot \frac{2\varrho'\pi \cdot d\varrho'}{h^2+\varrho'^2} \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2+\varrho'^2}},$$

wo μ der Anziehungscoefficient ist.

Die Gesamtanziehung Z wird also dargestellt durch

$$Z = \mu \int_{-\varrho}^{+\varrho} \frac{2\varrho' h\pi d\varrho'}{(h^2+\varrho'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Setzt man $h^2 + \varrho'^2 = r^2$, so wird

$$Z = 2\mu h\pi \int_h^{\sqrt{h^2+\varrho^2}} \frac{dr}{r^2};$$

folglich

$$Z = 2\mu h\pi \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{h^2+\varrho^2}}\right);$$

oder

$$Z = 2\mu\pi \left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2+\varrho^2}}\right).$$

Bezeichnet γ den Winkel, welchen das Perpendikel OP mit einer von P nach irgend einem Punkte der Kreisperipherie gezogenen Geraden bildet, so ist

$$Z = 2\mu\pi(1 - \cos\gamma).$$

Wird die Kreisfläche unendlich groſs, also $\varrho = \infty$ oder $\gamma = R$, so ist

$$Z = 2\mu\pi;$$

d. h. die Anziehung ist unabhängig von der Entfernung des Punktes von der Fläche.

71. **Aufgabe.** Eine Kugelfläche vom **Radius** ϱ wirkt anziehend auf einen Punkt P, welcher sich im Abstande $p > \varrho$ vom Mittelpunkte O befindet. Die Anziehung erfolgt umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung. Es wird verlangt, die Intensität zu ermitteln.

Lösung. Wir beziehen die Kugelfläche und den Punkt P auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen x-Axe OP und dessen Anfang O ist. Bezeichnet dann α den Winkel, welchen die Verbindungslinie von der Länge l von P mit einem beliebigen Punkte xy der Kugelfläche bildet, so ist, da das Flächenelement in diesem Punkte

$$\frac{\varrho \, . \, dx \, . \, dy}{z} = \frac{\varrho \, . \, dx \, . \, dy}{\sqrt{\varrho^2 - x^2 - y^2}}$$

ist, die Anziehung dieses differentiellen Oberflächenelementes auf den Punkt

$$dX = \frac{\varrho \, . \, dx \, . \, dy}{\sqrt{\varrho^2 - x^2 - y^2}} \cdot \frac{\mu}{r^2} \cdot \cos \alpha;$$

oder

$$dX = \frac{\varrho \, dx \, dy}{\sqrt{\varrho^2 - x^2 - y^2}} \cdot \frac{\mu \, (p - x)}{(\sqrt{\varrho^2 + p^2 - 2px})^3} .$$

Mithin ergiebt sich für die Anziehung, welche die ganze Kugelfläche auf P ausübt,

$$X = 2 \varrho \mu \int_{-\varrho}^{+\varrho} \int_{-\sqrt{\varrho^2 - x^2}}^{+\sqrt{\varrho^2 - x^2}} \frac{(p - x) \, dx \, dy}{\sqrt{\varrho^2 - x^2 - y^2} \, (\sqrt{\varrho^2 + p^2 - 2px})^3}$$

oder

$$X = 2 \varrho \mu \pi \int_{-\varrho}^{+\varrho} \frac{(p - x) \, dx}{(\sqrt{\varrho^2 + p^2 - 2px})^3}$$

Hierfür können wir schreiben:

$$X = 2 \varrho \mu \pi \left(p \int_{-\varrho}^{+\varrho} \frac{dx}{(\sqrt{\varrho^2 + p^2 - 2px})^3} - \int_{-\varrho}^{+\varrho} \frac{x dx}{(\sqrt{\varrho^2 + p^2 - 2px})^3} \right).$$

Durch Ausführung der Integrationen folgt dann

$$X = \frac{\mu \cdot 4\pi\varrho^2}{p^2},$$

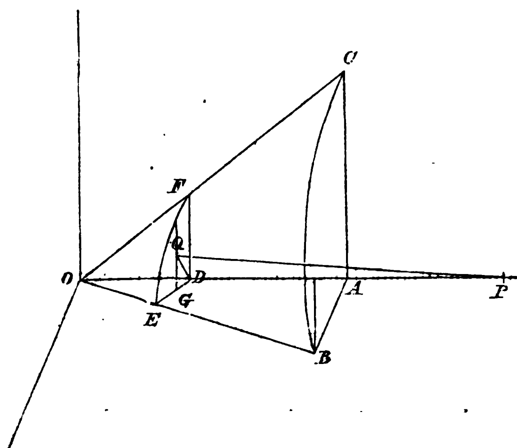
die Anziehung ist also ebenso grofs, als wenn die gesamte Masse der Kugelfläche in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre.

C) Anziehung der Körper.

72. **Aufgabe.** Wie grofs ist die nach dem Newton'schen Gesetze erfolgende Anziehung, welche ein gerader homogener Kreiskegel von der Höhe $OA = h$, dem Basisradius ϱ und der Dichtigkeit ε auf einen Punkt P von der Masse 1 ausübt, welcher auf seiner Axe unterhalb der Grundfläche in der Entfernung $p > h$ von der Spitze liegt und welchen Wert hat X, wenn der angezogene Punkt in dem Grundflächenmittelpunkt sich befindet.

Lösung. Man benutze cylindrische Coordinaten und nehme die Kegelspitze als Anfang der Abscissen; die Kegelaxe als x-Axe. Ein beliebiger Punkt Q der Kegelmasse

Fig. 15.



werde bestimmt durch die Coordinaten $OD = x$; $DQ = r$; $G\hat{D}Q = \varphi$; dann hat man für die Gesamtanziehung, welche auf P ausgeübt wird,

$$X = -\mu\varepsilon \int_0^h \int_0^{\frac{\varrho x}{h}} \int_0^{2\pi} \frac{r(p-x)\,dx\,dr\,d\varphi}{\left(\sqrt{(p-x)^2+r^2}\right)^3}.$$

Es ist sofort

$$X = -2\mu\varepsilon\pi \int_0^h (p-x)\,dx \int_0^{\frac{\varrho x}{h}} \frac{rdr}{\left(\sqrt{(p-x)^2+r^2}\right)^3}.$$

Nun ist

$$\int \frac{rdr}{\left(\sqrt{(p-x)^2+r^2}\right)^3} = -\frac{1}{\sqrt{(p-x)^2+r^2}};$$

Folglich wird

$$X = 2\mu\varepsilon\pi \int_0^h (p-x)\left(-\frac{h}{\sqrt{(p-x)^2h^2+\varrho^2x^2}} + \frac{1}{p-x}\right) dx;$$

oder

$$X = 2\mu\varepsilon h\pi\left(1 - p\int_0^h \frac{dx}{\sqrt{(p-x)^2h^2+\varrho^2x^2}}\right.$$

$$\left. + \int_0^h \frac{xdx}{\sqrt{(p-x)^2h^2+\varrho^2x^2}}\right).$$

Bezeichnet s die Seite des Kegels, so hat man nach einer bekannten Reduktionsformel aus der Integralrechnung

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{p^2h^2-2ph^2x+s^2x^2}} = \frac{\sqrt{p^2h^2-2ph^2x+s^2x^2}}{s^2}$$

$$+ \frac{ph^2}{s^2}\int \frac{dx}{\sqrt{p^2h^2-2ph^2x+s^2x^2}};$$

und weiter ist, wenn c den Abstand von P von der Kreisperipherie bedeutet, so dafs

$$c = \sqrt{(p-h)^2+\varrho^2} = \sqrt{p^2-2ph+s^2} \text{ ist,}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{p^2h^2-2ph^2x+s^2x^2}}$$

$$= \frac{1}{s}\, l\left(-2ph^2+2s^2x+2s\sqrt{p^2h^2-2ph^2x+s^2x^2}\right).$$

Hiernach wird leicht

$$X = 2\pi\mu\varepsilon h\left[\frac{h}{s^2}\left(\frac{p\varrho^2}{hs}\, l\, \frac{s^2-ph+cs}{p\,(s-h)} - c + h\right) - 1\right].$$

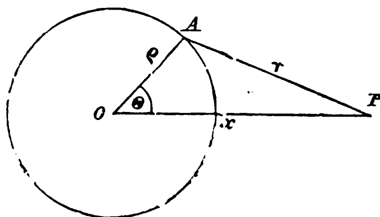
Wenn P mit dem Grundflächenmittelpunkte zusammenfällt, so ist einfacher

$$X = 2\pi\mu\varepsilon h\left[\frac{h}{s^2}\left(\frac{\varrho^2}{s}\, l\, \frac{\varrho\,(\varrho+s)}{h\,(s-h)} - \varrho + h\right) - 1\right].$$

73. **Aufgabe.** Eine homogene Hohlkugel, deren äufserer Radius ϱ_1, deren innerer ϱ_0 und deren Dichtigkeit ε ist, wirkt nach dem Newton'schen Gesetze anziehend auf einen Punkt P von der Masse 1. Es soll berechnet werden, wie grofs diese Anziehung X ist, 1. wenn der Punkt aufserhalb der Kugel liegt, 2. wenn er sich in dem umschlossenen Hohlraume befindet, 3. wenn er in die Masse der Hohlkugel selbst hineinfällt.

Lösung. Wir nehmen zur Axe der x die Gerade, welche den Punkt P mit dem Kugelmittelpunkte O verbindet. Bezeichnen wir mit ϱ ($> \varrho_0$; $\varrho < \varrho_1$) den inneren Radius einer Kugelschicht von der Dicke $d\varrho$ und mit Θ den Winkel eines beliebigen Radius mit der Axe der x so geht die frühere Formel

Fig. 16.



$$V = \int dm\,\varphi(r)$$

über in

$$V = 2\pi\mu\varepsilon \int_{\varrho_0}^{\varrho_1}\int_0^{\pi} \frac{\varrho^2 d\varrho \sin\Theta d\Theta}{r}.$$

Es ist nun aber

$$r^2 = \varrho^2 - 2x\varrho\cos\Theta + x^2;$$

daher

$$rdr = x\varrho\sin\Theta d\Theta;$$

und folglich

$$V = \frac{2\pi\mu\varepsilon}{x} \int\int \varrho\, d\varrho\, dr.$$

Bezüglich der Grenzwerte von r, welche $\Theta = 0$ und $\Theta = \pi$ entsprechen, ist nun der Fall, wo der Punkt aufserhalb des Körpers ist, zu unterscheiden von dem anderen, wo derselbe in dem von der Hohlkugel umschlossenen inneren Raume liegt.

1. Ist der angezogene Punkt aufserhalb, so hat man

$$V = \frac{2\pi\mu\varepsilon}{x} \int_{\varrho_0}^{\varrho_1}\int_{x-\varrho}^{x+\varrho} \varrho\, d\varrho\, dr;$$

$$V = \frac{4\pi\mu\varepsilon}{x} \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \varrho^2\, d\varrho = \frac{4\pi\mu\varepsilon}{3x}(\varrho_1^3 - \varrho_0^3);$$

folglich

da $X = \dfrac{dV}{dx}$ war,

$$X = -\frac{4}{3x^2}\pi\mu\varepsilon(\varrho_1^3 - \varrho_0^3).$$

Bezeichnet m die Masse der Hohlkugel, so wird

$$X = -\frac{\mu m}{x^2}.$$

Die Anziehung ist demnach dieselbe, als ob die ganze Materie des Körpers im Mittelpunkte vereinigt wäre.

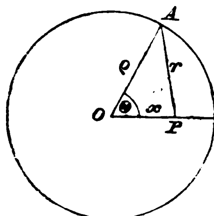
2. Liegt der angezogene Punkt P in dem umschlossenen Hohlraume, so hat man

$$V = \frac{2\pi\mu\varepsilon}{x}\int_{\varrho_0}^{\varrho_1}\int_{\varrho-x}^{\varrho+x} \varrho d\varrho dr;$$

oder

$$V = 4\pi\mu\varepsilon\int_{\varrho_0}^{\varrho_1}\varrho d\varrho.$$

Fig 17.



Weil diese Gröfse von x unabhängig ist, so wird

$$\frac{dV}{dx} = 0; \text{ und folglich } X = 0;$$

d. h. die Hohlkugel übt keine Wirkung auf einen Punkt aus, welcher in dem von ihrer kleineren Oberfläche begrenzten Raume liegt. Daraus folgt

3. dafs die Wirkung auf einen in die Hohlkugel selbst hineinfallenden Punkt sich auf diejenige reduziert, welche von dem zwischen der Kugelfläche mit dem Radius ϱ_0 und der durch den angezogenen Punkt konzentrisch gelegten Kugelfläche enthaltenen Teil ausgeübt wird. Demnach müfste man sich die diesen Teil ausmachende Masse im Mittelpunkte vereinigt und nach dem angegebenen Gesetz auf den Punkt wirkend denken.

74. **Aufgabe.** Eine homogene massive Kugel vom Radius ϱ wirkt nach dem Newton'schen Gesetze anziehend auf einen Punkt von der Masse 1. Es soll berechnet werden 1. wie grofs diese Anziehung X ist, wenn der Punkt P aufserhalb der Kugel liegt; 2. wenn er auf der Oberfläche gelegen ist; und 3. wenn er innerhalb der Kugel sich befindet.

Lösung. 1. In 73. 1. hatten wir für die Anziehung der Hohlkugel auf einen Punkt aufserhalb derselben gefunden:

$$X = -\frac{4\pi\mu\varepsilon}{3x^2}(\varrho_1{}^3 - \varrho_0{}^3).$$

Wird hierin $\varrho_0 = 0$ gesetzt, so erhalten wir die Anziehung der Vollkugel auf einen Punkt aufserhalb dieser als

$$X = -\frac{4}{3}\pi \cdot \mu \cdot \varepsilon \frac{\varrho^3}{x^2}.$$

2. Setzen wir in dieser letzten Formel $x = \varrho$, so ergiebt sich als Anziehungskraft der Kugel vom Radius ϱ auf einen Punkt auf der Oberfläche derselben

$$X = -\frac{4}{3}\pi\mu\varepsilon\varrho.$$

3. Liegt der materielle Punkt, welcher angezogen wird, endlich im Innern der Vollkugel im Abstande $x < \varrho$ vom Mittelpunkte O, so folgt nach 73, 3, dafs derselbe nur der Anziehungskraft der Kugel unterliegt, welche der ersteren konzentrisch ist und deren Oberfläche durch jenen Punkt hindurchgeht. Die Masse dieser ist $\frac{4}{3}\pi\mu\varepsilon x^3$. Die Gröfse der Anziehung ist

$$X = \frac{4}{3}\pi\mu\varepsilon x.$$

Sie ist folglich der Entfernung vom Mittelpunkte direkt proportional.

VII.

Vom Gleichgewicht der Kräfte, welche ein loses Punktsystem angreifen.

75. Ein **loses Punktsystem** ist ein System von materiellen Punkten, in welchem nicht alle Punkte unveränderlich mit einander verbunden sind. Bei einem solchen losen Punktsystem kann man die Zusammensetzungen und Zerlegungen nicht mehr machen, durch welche sämtliche Kräfte

auf eine einzige Kraft und ein einziges Paar zurückgeführt werden.

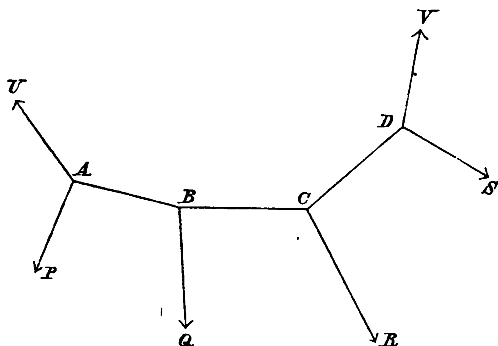
Der allgemeine Grundsatz, nach dem man diesen Fall auf den früheren zurückbringt, besteht darin, dafs es notwendig ist und ausreicht, dafs jeder Teil des Systems, welcher eine unveränderliche Gestalt hat, sich im Gleichgewicht befinde vermöge der Kräfte, die unmittelbar auf ihn wirken, worunter man auch diejenigen begreift, welche von den Verbindungen herrühren.

A) **Seilpolygon. Seilcurve.**

76. Wir wollen den Fall betrachten, wo Punkte durch biegsame und unausdehnbare Fäden verbunden sind, welche das bilden, was man **Seilpolygon** nennt.

Es seien A, B, C, D Punkte, die mit einander durch biegsame Fäden von unveränderlicher Länge verbunden sind;

Fig. 18.



U, P, Q, R, S, V seien Kräfte, welche an diesen Punkten angreifen und von denen die beiden äufsersten U, V vermittelst der Seile AU, DV wirken.

Damit dieses System im Gleichgewicht stehe, so mufs jeder der Punkte A, B, C und D im Gleichgewichte sein.

Der Punkt C z. B. wird von drei Kräften angegriffen, nämlich durch die von den Seilen CB und CD ausgeübten Wirkungen und durch die Kraft R; diese drei Kräfte müssen folglich in einer Ebene liegen, und jede von ihnen mufs dem Sinus des Winkels der beiden anderen proportional sein. Das Gleichgewicht eines Seiles verlangt aber noch, dafs es durch gleiche und entgegengesetzte Kräfte angezogen werde, deren Intensität die **Spannung des Seiles** heifst. Vermöge dieser Bedingungen kann man die Spannungen aller Seile und die Verhältnisse der Kräfte unter einander bestimmen, sobald man die Figur des Polygons im Zustand des Gleichgewichts kennt.

77. Die Spannung T irgend eines Seiles CD läfst sich sehr einfach bestimmen, wenn man beachtet, dafs Gleichgewicht besteht zwischen dieser Kraft T und dem Teile des Systems, der sich auf irgend einer der beiden Seiten von CD befindet. Betrachten wir z. B. die Kräfte U, P, Q, R und T; dieselben werden nicht aufhören, im Gleichgewicht zu sein, wenn man das Polygon ABC unbiegsam macht; und daraus folgt, dafs die Kraft T mit der Resultante der Kräfte U, P, Q, R gleich und entgegengesetzt ist. Und da man Kräfte, ohne ihre Wirkung zu ändern, an einen beliebigen Punkt ihrer Resultante versetzen kann, so erhält man den folgenden

Lehrsatz. Die Spannung irgend eines Seiles ist die Resultante aller auf derselben Seite dieses Seiles gelegenen und parallel mit sich an einen beliebigen Punkt desselben versetzten Kräfte.

78. Befindet sich das Polygon im Gleichgewicht, so wird es noch darin bleiben, wenn man seine Gestalt unveränderlich macht, und deshalb müssen alle daran angebrachten äufseren Kräfte den Bedingungen für das Gleichgewicht eines festen Systems Genüge leisten. Versetzt man dieselben also parallel mit sich an einen Punkt, so müssen sie

zur Resultante die Null ergeben, woraus drei Gleichungen entspringen.

Umgekehrt, wenn diese Bedingungen erfüllt sind, so kann man dem Polygon eine solche Figur geben, daſs Kräfte, welche der Gröſse und Richtung nach gegeben sind, sich an demselben im Gleichgewicht halten. Diese Folgerung, da sie von der Anzahl der Seiten des Polygons unabhängig ist, hat an der Grenze noch Geltung, wenn das Polygon, indem die Seiten gegen die Null hin abnehmen, ohne Ende in eine Kurve überzugehen strebt (Seilcurve).

Anstatt daſs die Kräfte U und V gegeben sind, können die zwei Endpunkte des Seiles fest sein.

B) Gleichgewicht eines biegsamen undehnbaren Fadens, dessen Punkte sämtlich der Wirkung irgend welcher Kräfte unterworfen sind.

79. Es seien X, Y, Z die Komponenten der Kraft, welche einen beliebigen Punkt des Fadens angreift, und welche auf die Längeneinheit bezogen ist. Dann wird auf einen unendlich kleinen Bogen ds eine Kraft wirken, deren Komponenten Xds, Yds, Zds sind. Die beiden Enden des Fadens können entweder fest sein, oder es können der Richtung und Gröſse nach gegebene Kräfte daran angreifen. Es sollen die Bedingungen für das Gleichgewicht des Systems gefunden werden.

Im Zustande des Gleichgewichts des Systems muſs jedes unendlich kleine Element des Fadens sich im Gleichgewicht befinden in Folge der Kräfte, welche dieses Element angreifen; und umgekehrt, findet letzteres statt, so ist der ganze Faden im Gleichgewicht.

Es sei also ds ein beliebiges Element. Dasselbe wird nicht aufhören, im Gleichgewicht zu bleiben, wenn man seine

Figur unveränderlich macht. Die Kräfte, welche auf das Element wirken, sind die an seinen äufsersten Punkten ausgeübten Spannungen, die nach den Tangenten in diesen Punkten, aber einander entgegengesetzt gerichtet sind, und aufserdem die Kräfte Xds, Yds, Zds.

Die Spannung T ändert sich auf stetige Weise zugleich mit dem Bogen s der Kurve, ist also eine stetige Funktion des Bogens, sowie die Cosinusse $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ der Winkel, welche die Tangente mit den Axen bildet. Die Seitenkräfte der Spannung, in dem Sinne betrachtet, in welchem s wächst, sind folglich an den beiden äufsersten Punkten des Bogens ds:

$$T\frac{dx}{ds},\ T\frac{dy}{ds},\ T\frac{dz}{ds};$$

und

$$T\frac{dx}{ds}+d\left(T\frac{dx}{ds}\right),\ T\frac{dy}{ds}+d\left(T\frac{dy}{ds}\right),\ T\frac{dz}{ds}+d\left(T\frac{dz}{ds}\right).$$

Die gesuchten Gleichgewichtsbedingungen sind nun jene für Kräfte an einem und demselben Punkt und müssen ausdrücken, dafs die Summen aller mit jeder Axe parallelen Komponenten einzeln gleich Null sind. Man erhält daher, wenn man bemerkt, dafs die Komponenten $T\frac{dx}{ds}$, $T\frac{dy}{ds}$, $T\frac{dz}{ds}$ mit dem entgegengesetzten Zeichen genommen werden müssen, die folgenden Gleichungen:

$$(1).\left\{\begin{aligned} &d\left(T\frac{dx}{ds}\right)+Xds=0,\\ &d\left(T\frac{dy}{ds}\right)+Yds=0,\\ &d\left(T\frac{dz}{ds}\right)+Zds=0.\end{aligned}\right.$$

Führt man die Differentiale aus, so wird

$$dT.\frac{dx}{ds}+T.d\left(\frac{dx}{ds}\right)+Xds=0,$$

$$dT.\frac{dy}{ds}+T.d\left(\frac{dy}{ds}\right)+Yds=0,$$

$$dT.\frac{dz}{ds}+T.d\left(\frac{dz}{ds}\right)+Zds=0.$$

Multipliziert man die erste dieser Gleichungen mit $\frac{dx}{ds}$, die zweite mit $\frac{dy}{ds}$, die dritte mit $\frac{dz}{ds}$ und addiert, so erhält man

$$dT\left(\frac{dx^2}{ds^2}+\frac{dy^2}{ds^2}+\frac{dz^2}{ds^2}\right)+T\left(\frac{dx}{ds}d\left(\frac{dx}{ds}\right)+\frac{dy}{ds}d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{dz}{ds}.d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right)+Xdx+Ydy+Zdz=0.$$

Hierin ist nun

$$\frac{dx^2}{ds^2}+\frac{dy^2}{ds^2}+\frac{dz^2}{ds^2}=1,$$

woraus zugleich folgt, dafs

$$\frac{dx}{ds}d\left(\frac{dx}{ds}\right)+\frac{dy}{ds}d\left(\frac{dy}{ds}\right)+\frac{dz}{ds}d\left(\frac{dz}{ds}\right)=0.$$

Mithin geht die obige Gleichung über in

$$dT+Xdx+Ydy+Zdz=0.$$

In dem gewöhnlichsten Falle ist $Xdx+Ydy+Zdz$ die Differentialgröfse einer Funktion $\varphi(x, y, z)$, und man hat alsdann

$$T=-\varphi(x,y,z)+C;$$

und wenn man die Spannung T' in dem Punkt, dessen Coordinaten x', y', z' sind, kennt, so hat man

$$T-T'=\varphi(x', y', z')-\varphi(x, y, z),$$

so dafs man die Spannung in jedem anderen Punkt als Funktion seiner Coordinaten findet; und in allen Fällen ist der Unterschied der unbekannten Spannungen, welche in zwei Punkten des Fadens stattfinden, nur von den Coordinaten dieser Punkte abhängig. Substituiert man den Wert

von T in zwei der Gleichungen (1), so erhält man die Gleichungen der Kurve, die der Faden bildet.

80. **Faden, auf welchen die Kräfte senkrecht wirken.** Wenn die Kraft, deren Komponenten X, Y, Z sind, in allen Punkten der Kurve senkrecht stände, so würde man haben:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0;$$

$\varphi(x, y, z)$ würde konstant sein, und folglich auch T; in diesem Falle empfindet also der Faden in allen Punkten gleiche Spannungen.

Wenn die Spannung T konstant ist, so werden die Gleichungen (1):

$$Td\frac{dx}{ds} = -Xds; \quad Td\frac{dy}{ds} = -Yds; \quad Td\frac{dz}{ds} = -Zds.$$

woher

$$T^2\left[\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2\right] = (X^2 + Y^2 + Z^2)\,ds^2,$$

oder, wenn man durch P die Kraft und durch ϱ den Krümmungshalbmesser bezeichnet,

$$T^2 = P^2\varrho^2 \text{ und daher } P = \frac{T}{\varrho};$$

d. h. wie auch die senkrechte Kraft sein mag, der Faden nimmt im Gleichgewicht eine solche Gestalt an, daſs diese Kraft im umgekehrten Verhältnisse des Krümmungshalbmessers steht.

81. **Aufgabe.** Es soll die Kurve untersucht werden, welche ein Faden annimmt, der über eine krumme Fläche $F(x, y, z) = 0$ gespannt wird.

Lösung. Die wirkende Kraft P ist hier der Widerstand der Fläche; also P ist normal gerichtet. Die Komponenten von P seien X, Y, Z; P bildet mit den Axen bez. die Winkel α, β, γ, deren Cosinusse dieselben sind, wie die Cosinusse der Winkel, welche die Normale mit den bez. Axen bildet; nämlich

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{W};\ \cos\beta = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{W};\ \cos\gamma = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{W},$$

wo

$$W^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2.$$

Die Komponenten selbst von P sind also

$$P\cos\alpha = \frac{P}{W}\cdot\frac{\partial F}{\partial x} = X;\ P\cos\beta = \frac{P}{W}\frac{\partial F}{\partial y} = Y;$$

$$P\cos\gamma = \frac{P}{W}\frac{\partial F}{\partial z} = Z.$$

Da P normal wirkt, so ist $P = \frac{T}{\varrho}$; also wird

$$\frac{X}{T} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{W};\ \frac{Y}{T} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{W};\ \frac{Z}{T} = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{W}.$$

Für die Komponenten der normal wirkenden Kraft haben wir aus 80. die Werte

$$-X = T\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds};\ -Y = T\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds};\ -Z = T\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds};$$

oder

$$-\frac{X}{T} = \frac{d^2x}{ds^2};\ -\frac{Y}{T} = \frac{d^2y}{ds^2};\ -\frac{Z}{T} = \frac{d^2z}{ds^2}.$$

Mithin wird

$$-\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{W};\ -\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{W};\ -\frac{d^2z}{ds^2} = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{W};$$

woraus sofort folgt

$$\frac{d^2x}{ds^2} : \frac{d^2y}{ds^2} : \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{\partial E}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z};$$

oder

$$d^2x : d^2y : d^2z = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Diese Proportion ist aus der Theorie der Krümmung der Flächen bekannt und drückt diejenige Kurve aus, welche die kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten der Fläche darstellt.

82. **Aufgabe.** Es soll die Curve bestimmt werden, welche durch einen biegsamen Faden gebildet wird, von dem zwei Punkte fest sind und welcher einzig und allein der Wirkung der Schwere unterworfen ist. Der Faden werde homogen gedacht; seine Längeneinheit habe das Gewicht ε.

Lösung. Weil alle Kräfte parallel sind, so mufs die krumme Linie in der durch die beiden festen Punkte gehenden Vertikalebene enthalten sein. Wir nehmen in dieser Ebene zwei Axen rechtwinkliger Coordinaten, davon die y-Axe vertikal, aber im entgegengesetzten Sinne der Schwere. εs wird das Gewicht eines Bogenstücks von der Länge s sein. Im vorliegenden Fall ist

$$X = 0;\quad Y = -\varepsilon.$$

Die allgemeinen Gleichungen (1) vereinfachen sich hiernach und werden

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0;\qquad d\left(T\frac{dy}{ds}\right) - \varepsilon\, ds = 0;$$

aus der ersteren folgt sofort $T\frac{dx}{ds} = A$ (wo A eine willkürliche Konstante), d. h. die Horizontalspannung ist überall gleich grofs.

Es ist $T = A\frac{ds}{dx}$; diesen Wert in die zweite Gleichung oben eingesetzt, giebt

$$d\left(A\frac{dy}{dx}\right) - \varepsilon\, ds = 0.$$

Ist $\frac{dy}{dx} = p$, so ist $ds = dx\,\sqrt{1+p^2}$;

$$\varepsilon\, dx \sqrt{1+p^2} = A\, dp;\ \varepsilon\, dx = A \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}};$$

$$\varepsilon x + C = A\, l\left(\sqrt{1+p^2} + p\right)$$

(wo C eine neue Konstante);

$$\frac{\varepsilon x + C}{A} = l\left(\sqrt{1+p^2} + p\right);$$

also

$$e^{\frac{\varepsilon x + C}{A}} = \sqrt{1+p^2} + p;$$

oder

$$\left(e^{\frac{\varepsilon x + C}{A}} - p\right)^2 = 1 + p^2;$$

woraus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\varepsilon x + C}{A}} - e^{-\frac{\varepsilon x + C}{A}}\right).$$

Integriert, giebt

$$y + k = \frac{A}{2\varepsilon}\left(e^{\frac{\varepsilon x + C}{A}} + e^{-\frac{\varepsilon x + C}{A}}\right);$$

(k eine neue willkürliche Konstante).

Dies ist die Gleichung der gesuchten Kurve, welche **Kettenlinie** heifst. Die Konstanten A, C und k lassen sich bestimmen aus der jedes Mal vorgeschriebenen Länge des Fadens und der Lage seiner zwei festen Aufhängepunkte.

Wählt man das Coordinatensystem so, dafs man setzt $x = x - \frac{C}{\varepsilon}$; und $y = y - k$, und setzt man zur Abkürzung noch $\frac{\varepsilon}{A} = \frac{1}{a}$, so geht die Gleichung der Kettenlinie über in

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

Dies ist die eleganteste Form, in welcher man die Gleichung zu geben vermag und in welcher sie schon längst aus der Geometrie bekannt ist.

83. **Aufgabe.** Es soll jetzt die krumme Linie untersucht werden, welche der Faden bilden würde, wenn die senkrechte Kraft der horizontalen Projektion des Bogens, nicht aber dem Bogen selbst proportional wäre. Dieser Fall ist nahezu der bei den Hängebrücken.

Lösung. Es sei ε die Kraft, bezogen auf ein der Einheit gleiches Stück der Horizontalprojektion; da Yds die vertikale Komponente der auf den Bogen ds, dessen Projektion dx ist, wirkenden Kraft bezeichnet, so hat man:

$$Yds = -\varepsilon dx;$$

und da $X = 0$, so sind die Gleichungen des Gleichgewichts

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0; \qquad d\left(T\frac{dy}{ds}\right) - \varepsilon dx = 0;$$

woraus

$$T\frac{dx}{ds} = A; \qquad T\frac{dy}{ds} = \varepsilon x + C;$$

und

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varepsilon}{A}x + \frac{C}{A},$$

worin A und C zwei willkürliche Konstanten sind.

Die erste von diesen drei Gleichungen zeigt noch, dafs die horizontale Komponente der Spannung konstant ist.

Durch Integrieren der letzten Gleichung erhält man, wenn man einen der festen Punkte als Ursprung nimmt:

$$y = \frac{\varepsilon}{2A}x^2 + \frac{C}{A}x.$$

Die vom Faden gebildete Kurve ist mithin eine Parabel, deren Axe vertikal gerichtet ist. Die Konstanten A und C lassen sich bestimmen, indem man ausdrückt, dafs die Kurve durch den zweiten Punkt geht und dafs ihre Länge einer gegebenen Linie gleich ist.

VIII.

Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten.

84. Wenn ein System von materiellen Punkten im Gleichgewicht sich befindet und man nimmt an, dafs jeder von ihnen in eine Lage gebracht werde, welche von derjenigen, die er eingenommen hat, unendlich wenig entfernt ist und dafs die Punkte immer noch allen von der Natur des Systems abhängenden Bedingungen genügen, so versteht man unter der **virtuellen Geschwindigkeit** eines beliebigen Punktes des Systems die Gerade, welche die erste Lage desselben mit seiner zweiten verbindet.

Die virtuelle Geschwindigkeit eines Punktes nach einer bestimmten Richtung geschätzt, ist die Projektion dieser Geschwindigkeit auf diese Richtung; sie wird als positiv betrachtet, wenn die Richtung der Bewegung des Punktes aus seiner ersten Lage gegen die zweite hin, einen spitzen Winkel mit derjenigen macht, nach welcher die Geschwindigkeit genommen werden soll; als negativ, wenn dieser Winkel stumpf ist. Man erhält also der Gröfse und dem Zeichen nach die virtuelle Geschwindigkeit eines Punktes nach einer beliebigen Richtung genommen, indem man die absolute Gröfse dieser Geschwindigkeit mit dem Cosinus des Winkels multipliziert, den ihre Richtung mit jener macht, durch welchen man sie mifst.

Man nennt **virtuelles Moment** einer Kraft das Produkt ihrer Intensität in die virtuelle Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes, genommen in der Richtung der Kraft.

Es besteht nun das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten in Folgendem:

Wenn irgend ein System von Punkten im Gleichgewicht steht, und man denkt sich eine mit den sämtlichen Bedingungen, denen das System unter-

worfen ist, verträgliche, unendlich kleine Verrückung aller Punkte desselben, so ist die Summe der virtuellen Momente aller Kräfte der Null gleich, welche auch immer die Verrückung sein mag. Und umgekehrt, wenn diese Bedingung für jede von diesen virtuellen Versetzungen stattfindet, so steht das System im Gleichgewicht.

85. **Fall eines einzigen Punktes.** — Die Bedingung für das Gleichgewicht eines vollkommen freien Punktes war, dafs die Summe aller Kräfte, nach einer beliebigen Richtung genommen, gleich Null ist; und umgekehrt, findet dieses statt, so ist Gleichgewicht vorhanden. Ist also P eine beliebige von den diesen Punkt angreifenden Kräften, μ der Winkel, den sie mit irgend einer Richtung macht, dann mufs man haben:

$$\Sigma P \cos \mu = 0;$$

und wenn umgekehrt diese Gleichung für jede Richtung gilt, so befindet sich der Punkt im Gleichgewicht. Multipliziert man nun alle Glieder mit einer willkürlichen Gröfse m, so wird dadurch die Gleichung

$$\Sigma Pm \cos \mu = 0.$$

Nun ist $m \cos \mu$ die Projektion der auf die Richtung, welche man betrachtet, von dem gegebenen Punkt an aufgetragenen Gröfse m, projiziert auf die Richtung der Kraft P; ferner, da der Punkt vollkommen frei ist, so kann m als die Entfernung seiner ersten Lage von irgend einer anderen angesehen werden, die er einnehmen könnte; und wenn man dieselben unendlich klein voraussetzt, so wird sie dasjenige sein, was wir die virtuelle Geschwindigkeit dieses Punktes genannt haben. Dann ist $\Sigma Pm \cos \mu$ die Summe der virtuellen Momente der Kräfte; also wenn der Punkt sich im Gleichgewicht befindet, so ist diese Summe Null, und umgekehrt.

Wenn der Punkt nicht im Gleichgewicht wäre, so würde es zur Herstellung des Gleichgewichts genügen, dafs man eine der Resultante gleiche und entgegengesetzte Kraft einführte. Die Summe der Momente würde dann Null sein; zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte geben aber gleiche virtuelle Momente mit entgegengesetzten Zeichen; das virtuelle Moment der Resultante ist daher der Gröfse und dem Zeichen nach der Summe der virtuellen Momente der Komponenten gleich.

Wenn der Punkt gezwungen ist, auf einer festen Oberfläche zu bleiben, so wissen wir nach 15., dafs, soll Gleichgewicht vorhanden sein, die Resultante normal zur Fläche gerichtet sein mufs, und folglich, dafs $\Sigma P \cos\mu$ Null sei für alle in der Tangentialebene gelegenen Richtungen. Man hätte also noch, wie vorher,

$$\Sigma Pm \cos\mu = 0;$$

nur könnte m nicht mehr als die Entfernung zweier möglichen Lagen des Punktes angesehen werden, da das Ende der Linie m sich nicht auf der Oberfläche befindet. Aber wenn man auf der Oberfläche selbst einen in unendlich kleiner Entfernung δs von dem ersten gelegenen Punkt nimmt, so hat die Richtung der Geraden, welche beide Punkte verbindet, die einer Tangente an die Oberfläche zur Grenze, und folglich ist $\Sigma P \cos\mu$ unendlich klein; deshalb ist $\Sigma P\delta s \cos\mu$ unendlich klein im Verhältnis zu δs, und somit hat man

$$\Sigma P\delta s \cos\mu = 0.$$

Also in diesem neuen Fall des Gleichgewichts ist die Summe der virtuellen Momente sämtlicher Kräfte Null für alle mit den Bedingungen der Aufgabe verträglichen unendlich kleinen Versetzungen und umgekehrt.

Wenn der Punkt gezwungen ist, auf einer festen Kurve zu bleiben, so ist für das Gleichgewicht notwendig und hinreichend, dafs die Resultante auf der Kurve senk-

recht stehe, und folglich, dafs die Summe der Kräfte, im Sinne der Tangente genommen, der Null gleich sei; woraus man, wie im vorhergehenden Fall, schliefst, wenn durch δs ein unendlich kleiner Bogen der Kurve bezeichnet wird, dafs man hat:

$$\Sigma P \delta s \cos \mu = 0;$$

mithin ist auch hier für das Gleichgewicht notwendig und hinreichend, dafs die Summe der virtuellen Momente der Kräfte Null sei für alle mit den Bedingungen, welchen er unterworfen ist, vereinbaren Versetzungen des Punktes.

86. **Fall einer festen Geraden.** Es mögen jetzt irgend welche Kräfte die Endpunkte einer unbiegsamen Geraden angreifen. In diesem Falle können wir uns darauf beschränken, an jedem von beiden Punkten die Resultante der diesen Punkt angreifenden Kräfte zu betrachten, weil ihr virtuelles Moment der Summe jener ihrer Komponenten gleich ist. Wir haben demnach zu zeigen, dafs für den Fall des Gleichgewichts die Summe der virtuellen Momente dieser zwei Kräfte Null ist.

Die Gerade sei vollkommen frei und seien x, y, z, x', y', z' die Coordinaten ihrer Endpunkte M und M', sowie l ihre Länge, dann hat man

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 = l^2;$$

woraus sofort folgt

$$(x-x')(\delta x-\delta x') + (y-y')(\delta y-\delta y') + (z-z')(\delta z-\delta z') = 0;$$

während δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ die unendlich kleinen Zuwachse der Coordinaten der beiden Endpunkte für irgend eine virtuelle Versetzung sind.

Bezeichnet man nun die durch die Richtung der Geraden MM' mit den Axen gebildeten Winkel bez. mit α, β, γ, so hat man

$$\cos \alpha = \frac{x'-x}{l}; \cos \beta = \frac{y'-y}{l}; \cos \gamma = \frac{z'-z}{l}.$$

Die vorhergehende Gleichung geht daher über in:
$\delta x \cos\alpha + \delta y \cos\beta + \delta z \cos\gamma = \delta x' \cos\alpha + \delta y' \cos\beta + \delta z' \cos\gamma$;
und diese Gleichung lehrt, dafs die virtuellen Geschwindigkeiten der Endpunkte, genommen in der Richtung MM', einander gleich sind. Damit nun Gleichgewicht stattfinde, müssen die beiden Kräfte gleich und die eine von ihnen mufs längs $M'M$, die andere längs MM' gerichtet sein; ihre virtuellen Momente sind deshalb gleich und haben entgegengesetzte Zeichen, so dafs sie zur Summe Null geben. Das Gleiche würde für die Summe der virtuellen Momente aller Kräfte gelten, weil diese Summe ja dieselbe ist wie jene der Momente der beiden Kräfte, welche statt aller Kräfte gesetzt wurden.



Druck von Bär & Hermann in Leipzig.

Leitfaden und Repetitorium

der

Analytischen Mechanik.

Für Studierende an Universitäten und technischen Hochschulen.

Von

Rector **Dr. Albert Bieler.**

In zwei Teilen.

Zweiter Teil:

Analytische Dynamik der festen Körper.

Mit erläuternden Beispielen und in den Text gedruckten Holzschnitten.



Leipzig,

Verlag von Wilhelm Violet.

1888.

Vorwort zum zweiten Teile.

In diesem Teile hat die Lehre vom Stofse keine Berücksichtigung gefunden. Die Gründe hierfür, sowie die Bestimmung u. s. w. des Buches anlangend, verweise ich auf das Vorwort zum ersten Teile.

Zur weiteren Übung findet man zum Kapitel IV. Aufgaben in meiner „Bestimmung der Zeit des Herabfallens eines materiellen Punktes auf vertikalen Plankurven“ (Marburg, Sipmann'sche Buchhandlung).

Für briefliche Mitteilungen über etwaige Mängel werde ich stets dankbar sein.

Gräfenthal, im Juni 1888.

Bieler.

I.

Grundbegriffe der Dynamik.

1. Das Wort **Bewegung** bezeichnet die Erscheinung, daſs ein materieller Körper seinen Ort verändert und in dem Maſse, wie die Zeit verläuft, verschiedene Lagen im Raume einnimmt. Wir nennen zwei Zeitintervalle gleich, wenn zwei identische Körper, die sich zu Anfang derselben in gleichen Umständen befanden und einerlei Wirkungen und Einflüssen jeder Art unterworfen wurden, am Ende der beiden Intervalle den nämlichen Raum durchlaufen haben. Die Einheiten der Zeit und der Länge sind die Sekunde und das Meter. Die Bewegung eines materiellen Punktes heiſst gleichförmig, wenn derselbe in gleichen Zeiten gleiche Räume zurücklegt, wie klein auch diese Zeiten sein mögen. Eine Bewegung, die weder gleichförmig, noch aus gleichförmigen Bewegungen von endlicher Dauer zusammengesetzt ist, heiſst veränderlich.

Verstehen wir unter einem materiellen Punkte eine gewisse Quantität Materie, welche man sich in einen geometrischen Punkt vereinigt denkt, so besteht die Trägheit der Materie darin, daſs jeder ruhende materielle Punkt in Ruhe bleibt, so lange keine äuſsere Wirkung oder Kraft hinzu kommt; und bewegt er sich, ohne durch eine Kraft angegriffen zu werden, so ist seine Bewegung geradlinig und gleichförmig.

2. Unter **Geschwindigkeit** eines gleichförmig bewegten Punktes verstehen wir den Raum, welchen er in der Zeiteinheit durchläuft; oder, mit anderen Worten, das Verhältnis des durchlaufenen Raumes zu der dabei verflossenen Zeit. Bei der veränderlichen Bewegung darf man unter Geschwindigkeit in irgend einem Augenblick nicht mehr den von diesem Augenblick ab während der Zeiteinheit durchlaufenen Raum verstehen; es heifst die Geschwindigkeit des bewegten Punktes in einem gegebenen Augenblicke die mittlere Geschwindigkeit, mit welcher derselbe einen unendlich kleinen Bogen von diesem Augenblick ab beschreibt. Bezeichnet t die Zeit und s die Bogenlänge der beschriebenen Linie von irgend einem Ursprung an, so wird die Geschwindigkeit v in einem beliebigen Punkte der Bahn durch die erste Ableitung des durchlaufenen Weges s nach der Zeit t ausgedrückt, also

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Man darf sagen, Geschwindigkeit des bewegten Punktes in einem beliebigen Augenblicke sei diejenige, mit welcher derselbe sich gleichförmig bewegen würde, wenn von diesem Augenblick an jede Kraft darauf zu wirken aufhörte; die Richtung dieser geradlinigen gleichförmigen Bewegung ist die der Tangente an die Kurve.

3. Wie die Begriffe von Zeit und Raum einer wahren Erklärung nicht fähig sind, ebenso illusorisch würde es sein, den neuen Begriff der **Masse** erklären zu wollen. Wir sagen, zwei materielle Punkte haben gleiche Massen, wenn man dieselben, um sie aus dem Zustande der Ruhe in identische Bewegung zu versetzen, in jedem Augenblicke durch gleiche Kräfte angreifen mufs. Jeder Körper ist schwer; in dem Streben, sich der Erde zu nähern, übt er einen Druck aus, welchen man aufheben mufs, wenn der Körper unbeweglich bleiben soll. Das **Gewicht** ist das Mafs dieses

Druckes. Es besteht das Grundgesetz, das man als Definition ansehen muſs: die Masse der Körper ist dem Gewichte derselben proportional.

Mit dem Worte **Kraft** bezeichnen wir jede Ursache, welche im stande ist, einen ruhenden, materiellen Körper in Bewegung zu setzen, oder die Bewegung eines solchen Körpers zu verändern. Eine Kraft wird konstant genannt, wenn sie immer gleiche Wirkungen auf den angegriffenen Körper ausübt, wie auch die Bewegung desselben sein mag. Zwei beliebige konstante Kräfte, wenn sie auf gleiche Massen dieselbe Zeit hindurch wirken, erteilen ihnen Geschwindigkeiten, die im Verhältnis der beiden Kräfte stehen.

Das Produkt der Masse eines Körpers in seine Geschwindigkeit wird die **Grösse der Bewegung** oder **Bewegungsmoment** desselben genannt und wird als Maſs der Bewegung angesehen. Hiernach beurteilen wir auch die relative Gröſse der Kräfte; man kann sagen, eine beliebige konstante Kraft werde durch die Bewegungsgröſse, welche sie in der Zeiteinheit hervorbringt, gemessen.

Als Krafteinheit nimmt man das Kilogramm, d. h. das Gewicht eines Kubikdecimeters destillierten Wassers beim Maximum der Dichte. Nimmt man die Sekunde zur Zeiteinheit, das Meter als Längeneinheit und das Kilogramm als Krafteinheit, so wird die Masse von 9,80896 Kubikdecimetern destillierten Wassers bei der Temperatur von 4 Graden zur Masseneinheit.

Bezeichnet P das Gewicht des Körpers von der Masse m, so hat man $P = mg$, weil g Krafteinheiten das Gewicht der Masseneinheit ausdrücken; daraus findet sich

$$m = \frac{P}{g}.$$

Wir nennen **Dichte** einer gleichartigen Substanz die Masse der Volumeneinheit. Die Dichten der verschiedenen Substanzen sind folglich ihren specifischen Gewichten pro-

portional. Bedeutet V das Volumen eines homogenen Körpers, D seine Dichte, M seine Masse und P sein Gewicht, so haben wir:

$$M = VD; \qquad P = VDg.$$

Man nennt **lebendige Kraft** eines in Bewegung begriffenen Körpers das Produkt seiner Masse in das Quadrat seiner jedesmaligen Geschwindigkeit.

Die Bewegung eines Punktes wird erkannt, wenn man die Fragen beantwortet hat: welches ist am Ende einer beliebigen Zeit t die Richtung der durch den materiellen Punkt beschriebenen Linie, welches ist seine Geschwindigkeit, welches ist die Richtung und die Intensität der auf ihn wirkenden Kraft? Die Aufgaben über die Bewegung eines Punktes zerfallen in zweierlei Arten: 1) vorgeschrieben ist die Art der Bahn, in welcher sich der Punkt bewegen soll, oder die Geschwindigkeit desselben, oder beides; zu suchen sind die Kräfte, welche die Bewegung erzeugen; 2) vorgeschrieben sind die Kräfte, welche die Bewegung erzeugen; gesucht sollen werden die Bahn der Bewegung und die Geschwindigkeit.

Bewegung eines materiellen Punktes.

II.

Geradlinige Bewegung eines freien Punktes.

5. Denken wir uns irgend eine geradlinige Bewegung; v sei die Geschwindigkeit des bewegten Punktes, dessen Masse wir der Einheit gleich nehmen, x sein Abstand vom Ursprung, t die Zeit von einem gewissen Moment an; φ bezeichne die veränderliche Kraft, welche in jedem Augenblick auf den Punkt wirkt, d. h. ihr Verhältnis zur Krafteinheit, welches durch die Geschwindigkeit gemessen wird, die sie während der Zeiteinheit dem Beweglichen erteilen würde, dessen Masse der Einheit gleich ist. Dann wird

$$\varphi = \frac{dv}{dt}.$$

Dieser Ausdruck ist das genaue Maſs der auf die Masseneinheit kommenden Kraft bei jeder geradlinigen Bewegung. Er hat dasselbe Zeichen wie dv; daher ist bei Anwendung dieser Formel die Kraft als positiv zu betrachten, wenn sie die Geschwindigkeit zu vergröſsern strebt, und als negativ, wenn sie dieselbe verringern will. Es war nun aber $v = \frac{dx}{dt}$, welcher Ausdruck das positive Zeichen besitzt, wenn die Bewegung im Sinne der positiven x stattfindet. Mithin wird die Kraft positiv sein, wenn sie in diesem Sinne wirkt,

weil sie dann den algebraischen Wert von $\frac{dx}{dt}$ oder v vergrößert; negativ ist die Kraft im entgegengesetzten Sinne.

Schreibt man $\frac{dx}{dt}$ statt v in dem Ausdruck für φ, so erhält man:

$$\varphi = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

6. Betrachten wir jetzt einen Punkt von der Masse m, so wird die ihn bewegende Kraft durch $m\frac{dv}{dt}$ vorgestellt. Man nennt diese Kraft, welche auf eine beliebig gegebene Masse wirkt, **bewegende Kraft.** Ihr Maß ist:

$$m\frac{dv}{dt} \text{ oder } m\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Beschleunigende Kraft heißt diejenige, welche bei der betrachteten Bewegung auf die Masseneinheit kommt; sie wird gemessen durch:

$$\frac{dv}{dt} \text{ oder } \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Derselbe Ausdruck mißt die positive oder negative Beschleunigung der Bewegung.

A) Bewegung durch Einwirkung der Schwere im leeren Raume.

7. Es wirke auf den Körper nur die Schwerkraft g. Setzen wir in der allgemeinen Formel

$$\varphi = \frac{dv}{dt}$$

$$\varphi = g, \text{ so ist } g = \frac{dv}{dt}; \text{ und } v = g\int dt;$$

oder

$$v = gt + c;$$

und da $v = \frac{dx}{dt}$ ist, so wird

$$\frac{dx}{dt} = gt + c; \text{ also } x = \frac{g}{2}t^2 + ct + c'.$$

Die beiden Integrationskonstanten c und c' werden bestimmt nach dem Anfangszustande. Für $t = 0$ kann der Punkt sich in Ruhe befunden, oder schon eine gewisse Geschwindigkeit gehabt haben. Für den Fall der Ruhe ergiebt sich $c = 0$; für den anderen Fall ist c die Anfangsgeschwindigkeit. c' hängt davon ab, von wo aus der Raum gerechnet wird. Ist für $t = 0$ auch $x = 0$, so ist $c' = 0$; sonst könnte für $t = 0$ auch $x = c'$ genommen werden. Die einfachen **Fallgesetze** sind dann hieraus

$$v = gt; \qquad x = \frac{g}{2}t^2.$$

Wenn der Körper beim Fallen noch einen Stofs erhält, so haben wir

$$v = gt + c; \qquad x = \frac{g}{2}t^2 + ct.$$

Wenn der Körper senkrecht in die Höhe geworfen wird, so ist

$$v = gt - c; \text{ und } x = \frac{g}{2}t^2 - ct.$$

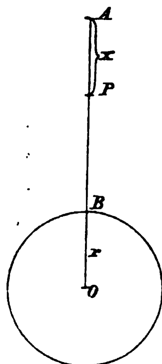
Für $t = \frac{c}{g}$ ist die Geschwindigkeit gleich Null; und der Körper ist am höchsten Punkte angelangt; für $x = 0$ ist er wieder am Ausgangspunkte und dies findet statt für $t = 0$ und für $t = \frac{2c}{g}$; d. h. die Zeit, welche der Körper braucht, um bis zum höchsten Punkte zu steigen, ist dieselbe wie er braucht, um von diesem dieselbe Strecke zu durchfallen.

Eliminiert man t aus den obigen Gleichungen für v und x, so erhält man noch

$$x = \frac{v^2 - c^2}{2g}; \qquad v = \sqrt{2gx + c^2}.$$

8. **Herabsteigende Bewegung.** Wir denken uns in A über der Erdoberfläche im Abstande h von derselben einen materiellen Punkt, der im umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung gegen den Erdmittelpunkt hingezogen wird. Der Erdradius sei r. P sei ein Punkt aus der Falllinie. $PA = x$; φ sei die Kraft, die auf den Körper im Punkt P wirkt.

Fig. 1.



Die Entfernung des Punktes P vom Erdmittelpunkt ist $h + r - x$; wir haben dann

$$\varphi : g = r^2 : (h + r - x)^2;$$

oder

$$\varphi = \frac{gr^2}{(h + r - x)^2}.$$

Nun war

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}; \text{ also } v\frac{dv}{dt} = v\frac{d^2x}{dt^2};$$

hier

$$v\frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{gr^2}{(h + r - x)^2};$$

folglich

$$2vdv = \frac{2gr^2dx}{(h + r - x)^2};$$

oder

$$v^2 = \frac{2gr^2}{h + r - x} + A.$$

Für $x = 0$, wird $v = 0$; woraus sich ergiebt

$$A = -\frac{2gr^2}{h + r};$$

folglich ist

$$v^2 = \frac{2gr^2x}{(h + r)(h + r - x)}.$$

Für die Geschwindigkeit in B, für welchen Fall $x = h$, erhält man

$$v^2 = \frac{2grh}{h + r}.$$

Wenn $h = \infty$ angenommen wird, so erhalten wir $v = \sqrt{2gr} = 11176$ m; da $r = 6366739$ m; $g = 9,80896$ m.

Es ist noch die Zeit t als Funktion des Raumes x darzustellen. Es war

$$v = \sqrt{\frac{2gr^2x}{(h + r)(h + r - x)}} = \frac{dx}{dt};$$

folglich

$$dt = dx\sqrt{\frac{(h + r)(h + r - x)}{2gr^2x}}.$$

Um zu integrieren, setzen wir

$$x = (h + r)\sin^2 w;$$

dann wird

$$dt = 2(h + r)\cos^2 w\, dw\sqrt{\frac{h + r}{2gr^2}};$$

hieraus

$$t = (h + r)\sqrt{\frac{h + r}{2gr^2}}(w + \sin w \cos w) + C.$$

Setzt man für w den Wert aus der obigen Substitutionsgleichung $x = (h + r)\sin^2 w$ ein, so ist

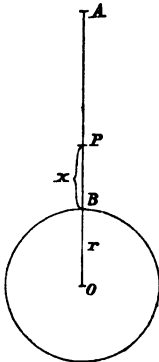
$$t = \frac{h + r}{r}\sqrt{\frac{h + r}{2g}}\left(\arcsin\sqrt{\frac{x}{h + r}} + \frac{\sqrt{x(h + r - x)}}{h + r}\right) + C.$$

Für $x = 0$, soll $t = 0$ sein; also wird, da dann $C = 0$,

$$t = \frac{h + r}{r}\sqrt{\frac{h + r}{2g}}\left(\arcsin\sqrt{\frac{x}{h + r}} + \frac{\sqrt{x(h + r - x)}}{h + r}\right).$$

Wenn der Körper von dem Monde auf die Erde fiele, so würde dies ungefähr 5 Tage dauern. Wenn der Körper von der Höhe r herunter fiele, so würde er dazu 35 Minuten brauchen.

9. **Aufsteigende Bewegung.** Es sei jetzt PB gleich x; und sei x gleich Null für den untersten Punkt. Im übrigen seien die Bedingungen wie in 8.



Jetzt ist

$$-\varphi : g = r^2 : (r+x)^2.$$

Hieraus

$$\varphi = \frac{-gr^2}{(r+x)^2} = \frac{d^2x}{dt^2} = v\frac{dv}{dx};$$

oder

$$2vdv = -\frac{2gr^2dx}{(r+x)^2}.$$

Integriert, giebt

$$v^2 = \frac{2gr^2}{r+x} + A.$$

Im Anfangspunkte, wo $x = 0$, habe der Körper die Anfangsgeschwindigkeit c; dann würde

$$A = c^2 - 2gr,$$

also

$$v^2 = c^2 - \frac{2grx}{r+x}$$

sein. Hier ist die Geschwindigkeit abhängig von der Anfangsgeschwindigkeit. Das Maximum der Höhe wird eintreten für $v = 0$; dann wird $x = \frac{c^2r}{2gr - c^2}$. Für den Fall, dafs c^2 gerade gleich $2gr$, d. h. $c = 11176$ m. in der Sekunde, wird $x = \infty$.

Es ist noch die Zeit t als Funktion des Raumes x zu bestimmen.

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{c^2 - \frac{2grx}{r+x}}.$$

Um am einfachsten zu integrieren, substituieren wir

$$x = \frac{r(c^2 - 2gr\sin^2 u)}{2gr - c^2};$$

dann wird

$$dt = \frac{-4gr^2 \cos^2 u du}{\left(2gr - c^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Hieraus folgt

$$t = \frac{-2gr^2}{\left(2gr - c^2\right)^{\frac{3}{2}}} (u + \sin u \cos u) + B;$$

oder, wenn man für u den Wert aus der Substitutionsgleichung einsetzt,

$$t = B - \frac{2gr^2}{\left(2gr - c^2\right)^{\frac{3}{2}}} \left[\arcsin \sqrt{\frac{c^2(r+x) - 2grx}{2gr^2}} + \frac{\sqrt{[c^2(r+x) - 2grx]\,[(2gr - c^2)(r+x)]}}{2gr^2}\right].$$

Für $x = 0$, soll $t = 0$ sein; dann ist

$$B = \frac{2gr^2}{\left(2gr - c^2\right)^{\frac{3}{2}}} \left[\arcsin \sqrt{\frac{c^2}{2gr}} + \frac{\sqrt{c^2(2gr - c^2)}}{2gr}\right].$$

Aus dieser Gleichung für t würde sich für x eine transcendente Gleichung ergeben.

B) Bewegung durch Einwirkung der Schwere in einem Widerstand leistenden Mittel.

Bisher haben wir die Bewegung eines Körpers betrachtet der ohne Widerstand frei der Einwirkung der Schwere unterliegt. In Wirklichkeit ist dies jedoch nicht so, weil Hindernisse verschiedener Art die Fallbewegung verändern.

10. **Herabsteigende Bewegung.** Ein Körper soll im lufterfüllten Raume fallen, getrieben von der konstanten Schwerkraft. Der Widerstand sei dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional. Dann hat man

$$\varphi = g - kv^2.$$

Es war $v = \frac{dx}{dt}$; also auch $v\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dt}$;

$$\frac{dv}{dt} = \varphi; \text{ also } g - kv^2 = v\frac{dv}{dx};$$

folglich

$$dx = \frac{vdv}{g - kv^2}.$$

Hieraus wird

$$x = -\frac{1}{2kg}\,l\left(g - kv^2\right) + \frac{1}{2kg}\,l(g);$$

oder

$$x = -\frac{1}{2kg}\,l\left(1 - \frac{kv^2}{g}\right).$$

Letzte Gleichung ergiebt

$$v^2 = \frac{g}{k}\left(1 - e^{-2kgx}\right).$$

Um t zu finden, benutzt man

$$v = \frac{dx}{dt};$$

also

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{g}{k}\left(1 - e^{-2kgx}\right);$$

oder

$$dt^2 = k\frac{dx^2}{g\left(1 - e^{-2kgx}\right)};$$

oder

$$dt = \sqrt{\frac{k}{g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1 - e^{-2kgx}}};$$

woraus

$$t = \sqrt{\frac{k}{g}}\int\frac{dx}{\sqrt{1 - e^{-2kgx}}}.$$

11. **Aufsteigende Bewegung.** In diesem Falle ist $\varphi = -g - kv^2$; also auch

$$\frac{dv}{dt} = -g - kv^2.$$

Hieraus

$$dt = -\frac{dv}{g + kv^2}.$$

Integriert, giebt, wenn man $v = \sqrt{\frac{g}{k}} \cdot w$ setzt, zunächst

$$dt = -\frac{1}{\sqrt{gk}} \cdot \frac{dw}{1 + w^2};$$

und hieraus sofort

$$t = -\frac{1}{\sqrt{kg}} \text{ arc tan } \sqrt{\frac{k}{g}} \cdot v + A.$$

Für $t = 0$, sei $v = c$; dann ergiebt sich für die Konstante

$$A = \frac{1}{\sqrt{kg}} \text{ arc tan } \sqrt{\frac{k}{g}} \cdot c;$$

also wird

$$t = \frac{1}{\sqrt{kg}} \left(\text{arc tan } \sqrt{\frac{k}{g}} \cdot c - \text{arc tan } \sqrt{\frac{k}{g}} \cdot v \right);$$

oder

$$t = \frac{1}{\sqrt{kg}} \text{ arc tan } \frac{\sqrt{\frac{k}{g}} (c - v)}{1 + \frac{k}{g} c \cdot v};$$

oder in anderer Form

$$\tan (\sqrt{kg} \cdot t) = \frac{\sqrt{\frac{k}{g}} (c - v)}{1 + \frac{k}{g} \cdot c \cdot v}.$$

Für $v = 0$ erhalten wir die Zeit t, nach welcher der Körper im höchsten Punkte anlangt:

$$t = \frac{1}{\sqrt{kg}} \text{ arc tan } \left(\sqrt{\frac{k}{g}} \cdot c \right);$$

oder

$$\tan(\sqrt{kg}\cdot t)=\sqrt{\frac{k}{g}}\cdot c.$$

Es soll nun der Raum als Funktion der Zeit ausgedrückt werden. Aus

$$\tan(\sqrt{kg}\cdot t)=\frac{\sqrt{\frac{k}{g}}(c-v)}{1+\frac{k}{g}cv}$$

folgt

$$\sin(\sqrt{kg}\cdot t)+\sin(\sqrt{kg}\cdot t)\frac{k}{g}cv=\cos(\sqrt{kg}\cdot t)\sqrt{\frac{k}{g}}\cdot c \\ -\cos(\sqrt{kg}\cdot t)\sqrt{\frac{k}{g}}\,v.$$

Hieraus

$$v=\frac{-\sin(\sqrt{kg}\cdot t)+c\sqrt{\frac{k}{g}}\cos(\sqrt{kg}\cdot t)}{\sqrt{\frac{k}{g}}(\cos\sqrt{kg}\cdot t)+c\sqrt{\frac{k}{g}}\sin(\sqrt{kg}\cdot t)}.$$

Da nun $v=\frac{dx}{dt}$ ist, so folgt

$$dx=\frac{-\sin(\sqrt{kg}\cdot t)+c\sqrt{\frac{k}{g}}\cos(\sqrt{kg}\cdot t)}{\sqrt{\frac{k}{g}}(\cos\sqrt{kg}\cdot t)+c\sqrt{\frac{k}{g}}\sin(\sqrt{kg}\cdot t)}\cdot dt.$$

Um diese Gleichung zu integrieren, setze man den Nenner des Bruches gleich $\sqrt{\frac{k}{g}}\cdot y$, so wird $dx=\frac{dy}{k\cdot y}$; also

$$x=\frac{1}{k}ly.$$

Für y hierin den Wert substituiert, giebt

$$x=\frac{1}{k}l\left(\cos(\sqrt{kg}\cdot t)+c\sqrt{\frac{k}{g}}\sin(\sqrt{kg}\cdot t)\right)+C.$$

Für $t=0$ mag $x=0$ sein; dann wird $C=0$; also

$$x=\frac{1}{k}\,l\left(\cos\left(\sqrt{kg}\cdot t\right)+c\sqrt{\frac{k}{g}}\sin\left(\sqrt{kg}\cdot t\right)\right).$$

Um den Raum, vom tiefsten bis zum höchsten Punkte, zu finden, benutzen wir die frühere Gleichung:

$$\tan\left(\sqrt{kg}\cdot t\right)=\sqrt{\frac{k}{g}}\cdot c.$$

Hieraus

$$\sin\left(\sqrt{kg}\cdot t\right)=\frac{\sqrt{\frac{k}{g}}\cdot c.}{\sqrt{1+\frac{k}{g}\cdot c^2}},$$

$$\cos\left(\sqrt{kg}\cdot t\right)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{g}c^2}}.$$

Diese Werte in die Formel für x eingesetzt, giebt

$$x=\frac{1}{k}\,l\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{g}c^2}}+c\sqrt{\frac{k}{g}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{k}{g}}\cdot c}{\sqrt{1+\frac{k}{g}c^2}}\right);$$

oder

$$x=\frac{1}{2k}\,l\left(1+\frac{k}{g}c^2\right).$$

III.

Krummlinige Bewegung eines freien Punktes.

12. Wir gehen jetzt zu dem allgemeinen Fall über, dass der Punkt unter Einwirkung beliebiger Kräfte eine Bewegung annimmt, deren Geschwindigkeit und Richtung sich mit der Zeit und der Lage des Körpers verändern kann.

Wir beziehen die verschiedenen Lagen des materiellen Punktes auf drei rechtwinklige Axen. Bezeichnen x, y, z

die Coordinaten des Punktes für die der Zeit t entsprechende Lage, so ist die Bewegung vollkommen bestimmt, wenn es gelingt, drei Gleichungen zwischen x, y, z, t zu erhalten; denn man vermag dann für jeden Augenblick die Werte von x, y, z und somit die Lage des Punktes anzugeben. Eliminiert man dann aus den Gleichungen t, wodurch zwischen x, y, z zwei Gleichungen erhalten werden, so sind dies die Gleichungen für die Bahnlinie des Punktes oder der Trajektorie.

Ist die Bewegung bestimmt, so muss auch Alles, was sich darauf bezieht, bestimmt sein.

Wir wollen nun die Formeln aufsuchen, vermöge welcher man Richtung und Gröſse sowohl der Geschwindigkeit, als Kraft durch diejenigen Funktionen von t ausdrücken kann, welche x, y, z vorstellen. Dieselben können dazu dienen, diese Gröſsen aus der Bewegung oder die Bewegung aus ihnen zu bestimmen.

13. **Geschwindigkeit.** — Der Ausdruck für die Geschwindigkeit war

$$v = \frac{ds}{dt},$$

wenn unter s der zurückgelegte Bogen verstanden wird. Unter der Richtung der Bewegung oder der Geschwindigkeit eines Punktes verstehen wir jene der Tangente an seine Bahnlinie. Trägt man auf dieser Tangente nach der Richtung der Geschwindigkeit eine ihr gleiche Länge ab und konstruiert ein Parallelopiped, dessen Diagonale sie ist und dessen Kanten mit den Axen gleich laufen, so heiſsen diese Kanten die mit den Axen parallelen Komponenten der Geschwindigkeit; sie sind die Projektionen derselben auf die Axen. Im Allgemeinen versteht man unter der nach einer Richtung zerlegten oder geschätzten Geschwindigkeit ihre Projektion darauf. Sie ist die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Projektion des Punktes auf dieser Richtung bewegt.

Ist v die Geschwindigkeit in einem beliebigen Punkte der Bahn, so werden ihre Komponenten ausgedrückt durch

$$v_x = v\frac{dx}{ds};\ v_y = v\frac{dy}{ds};\ v_z = v\frac{dz}{ds}.$$

Weil nun $v = \frac{ds}{dt}$ war, so stellen sich die Komponenten v_x, v_y, und v_z dar als

$$v_x = \frac{dx}{dt};\ v_y = \frac{dy}{dt};\ v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Die resultierende Geschwindigkeit stellt sich demnach, durch v_x, v_y und v_z ausgedrückt, dar durch:

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

Die Richtung der Linie, welche der materielle Punkt beschreibt, bildet mit den Axen der x, y und z in dem Punkte, in dem sich derselbe am Ende der Zeit t befindet, Winkel, deren Cosinusse bezüglich sind

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}};$$

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}};$$

$$\frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}.$$

14. **Intensität und Richtung der Kraft.** — Es ist nun die Aufgabe zu lösen, die Gröfse und Richtung der Geschwindigkeit, welche dem materiellen Punkte in der Zeit-

einheit am Ende der Zeit t erteilt wird, d. h. die auf denselben wirkende Kraft zu bestimmen. Um diese Aufgabe zu lösen, muss man die Veränderung der Bewegung des Punktes in der unendlich kleinen Zeit dt untersuchen. Die in dem Augenblicke dt, welcher der Zeit folgt, hinzugekommene Geschwindigkeit muss nun, mit der bis dahin erlangten Geschwindigkeit $\sqrt{(v_x)^2+(v_y)^2+(v_z)^2}$ komponiert, die am Ende der Zeit $t+dt$ erlangte Geschwindigkeit ergeben. Die Komponierenden der während des Zeitelements dt neu hinzugekommenen Geschwindigkeit nach Richtung der Axen der x, y und z sind nichts anderes, als eben die während dieses Zeitelements eintretenden Zunahmen der Geschwindigkeiten v_x, v_y und v_z, also dv_x, dv_y und dv_z.

Daher sind

$$\frac{dv_x}{dt},\ \frac{dv_y}{dt}\ \text{und}\ \frac{dv_z}{dt}$$

bezüglich die Komponierenden nach Richtung jeder Axe für die Geschwindigkeit, welche der materielle Punkt in der Zeiteinheit am Ende der Zeit t erlangt. Die Komponierenden sind

$$X=\frac{dv_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2};$$

$$Y=\frac{dv_y}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2};$$

$$Z=\frac{dv_z}{dt}=\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Diese drei Gleichungen enthalten die Hauptbedingungen der Bewegung eines Punktes.

Der Wert der Geschwindigkeit selbst wird also dargestellt durch

$$\varphi=\sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv_z}{dt}\right)^2};$$

oder

$$\varphi = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}.$$

Die Zeit ist hierbei die unabhängige Variabele.

Die Richtung dieser Geschwindigkeit bildet mit den Axen der x, y und z Winkel, deren Cosinusse bezüglich sind

$$\cos\alpha = \frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}};$$

$$\cos\beta = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}}.$$

15. Bezeichnet man mit m die Masse des materiellen Punktes, so ist die Gröfse der Bewegung, welche dem Punkte in der Zeiteinheit erteilt wird, am Ende der Zeit t

$$m\sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_z}{dt}\right)^2};$$

oder

$$m\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}.$$

16. Von Nutzen ist noch folgende Bemerkung. Es ist

$$2\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2} = 2\left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}\right);$$

oder

$$\frac{d\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)}{dt} = 2\frac{Xdx + Ydy + Zdz}{dt};$$

oder

$$dv^2 = 2(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Sind nun X, Y, Z die partiellen Differentialquotienten einer Funktion $F(x, y, z)$, so hat man weiter

$$dv^2 = 2d\,F(x, y, z);$$

$$v^2 = 2\,F(x, y, z) + \text{Const};$$

und wenn man weifs, dafs der Punkt an der Stelle a, b, c die Geschwindigkeit w besitzt, so

$$v^2 - w^2 = 2\,F(x, y, z) - 2\,F(a, b, c).$$

A) Bewegung geworfener Körper.

17. Die Bahn eines mit gegebener Geschwindigkeit nach beliebiger Richtung geworfenen Körpers, auf welchen zugleich nach unten die Schwerkraft wirkt, mufs in der durch die anfängliche Richtung seiner Geschwindigkeit hindurchgehenden Vertikalebene liegen. Daher genügt es, die Bewegung des materiellen Punktes auf eine in dieser Vertikalebene liegende, horizontale Coordinate x und auf eine vertikale z, die von unten nach oben gerechnet werden möge, zu beziehen.

c sei die Anfangsgeschwindigkeit; φ der durch die Richtung von c mit der x-Axe gebildete Winkel. Der Luftwiderstand werde unberücksichtigt gelassen. Dann sind die Gleichungen der Bewegung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g.$$

Daraus folgt unmittelbar

$$\frac{dx}{dt} = c\cos\varphi; \quad \frac{dz}{dt} = c\sin\varphi - gt.$$

Die zweite Integration ergiebt

$$x = tc\cos\varphi; \quad z = tc\sin\varphi - \frac{g}{2}t^2.$$

Eine Konstante braucht man nicht hinzuzufügen, weil man den Anfangspunkt der Coordinaten in die Anfangslage des Punktes hineinlegen kann.

Die Geschwindigkeit v nach der Zeit t wird dann

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}=\sqrt{c^2-2gz}.$$

18. Die Gleichung der Wurfbahn erhält man, wenn man aus den beiden Gleichungen für x und z die Zeit t eliminiert, als

$$z=x\tan\varphi-x^2\frac{g}{2c^2\cos^2\varphi}.$$

Die Kurve ist eine Parabel; die Coordinaten ihres Scheitelpunktes sind

$$x=\frac{c^2\sin 2\varphi}{2g};\text{ und } z=\frac{c^2\sin^2\varphi}{2g}.$$

Wenn die Wurflinie durch einen bestimmten Punkt (ξ, ζ) hindurchführen soll, so würde die Anfangsgeschwindigkeit und die Richtung zu bestimmen sein. Es mufs dann sein

$$\zeta=\xi\tan\varphi-\xi^2\frac{g}{2c^2\cos^2\varphi}.$$

Setzt man in dieser Gleichung einmal $\tan\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$, das andere Mal $\cos^2\varphi=\frac{1}{1+\tan^2\varphi}$, so erhält man die beiden Gleichungen:

$$\zeta=\xi\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}-\xi^2\frac{g}{2c^2\cos^2\varphi};$$

$$\zeta=\xi\tan\varphi-\frac{g\xi^2(1+\tan^2\varphi)}{2c^2};$$

aus diesen folgt

$$c=\sqrt{\frac{g\xi^2}{\zeta\sin 2\varphi-2\xi\cos^2\varphi}};$$

$$\tan\varphi = \frac{c^2 \pm \sqrt{c^4 - 2c^2 g\zeta - g^2\xi^2}}{g\xi};$$

oder, wenn $z = 0$ ist,

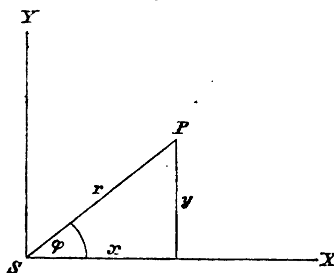
$$c = \sqrt{\frac{g\xi}{\sin 2\varphi}}; \quad \sin 2\varphi = \frac{g\xi}{c^2}.$$

Einer gegebenen Weite entsprechen immer zwei Anfangsrichtungen. Die gröſstmögliche Weite, das Maximum des Wertes von $\xi = \frac{c^2 \sin 2\varphi}{g}$ gehört dem Werte von $\varphi = \frac{\pi}{4}$ zu.

B) **Bewegung um ein festes Centrum.**

19. Die Kurve zu finden, welche ein Punkt beschreibt, der gegen ein festes Centrum dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional (nach dem Newton'schen Gesetze) angezogen wird. $\left(\varphi = \frac{k}{r^2}\right)$.

Fig. 3.



S bezeichne das feste Centrum, P den angezogenen Punkt. Wir haben blos zwei Gleichungen zu betrachten, denn der materielle Punkt wird immer in ein und derselben Ebene liegen, weil keine Kraft da ist, die ihn aus der Ebene herausbringen könnte. Die Bewegung geht in der xy-Ebene vor sich. Es ist

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{k}{r^2}\cdot\cos\varphi; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{k}{r^2}\cdot\sin\varphi.$$

Es ist nun $\cos\varphi = \frac{x}{r}$; $\sin\varphi = \frac{y}{r}$;

folglich wird

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{kx}{r^3}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{ky}{r^3}.$$

Es ist zu integrieren

$$x\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{kxy}{r^3};$$

$$y\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{kxy}{r^3}.$$

Durch Subtraktion folgt

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

Hieraus

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = A \text{ (Konst.)},$$

oder in Polarcoordinaten ($x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$)

$$\frac{r^2 d\varphi}{dt} = A \text{ (ein unendlich kleiner Sektor).}$$

Hieraus

$$dt = \frac{r^2 d\varphi}{A}.$$

Eingesetzt in die Gleichungen

$$\frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt} = -\frac{kx}{r^3}; \quad \frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{dt} = -\frac{ky}{r^3};$$

giebt

$$d\left(\frac{dx}{dt}\right) = -\frac{k\cos\varphi d\varphi}{A}; \quad d\left(\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{k\sin\varphi d\varphi}{A}.$$

Integriert, erhält man

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{k\sin\varphi}{A} + B; \quad \frac{yd}{dt} = \frac{k\cos\varphi}{A} + C.$$

Diese Werte in die frühere Gleichung

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=A$$

substituiert und zugleich hierin $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ gesetzt, giebt

$$\frac{k}{A}r+r(C\cos\varphi-B\sin\varphi)=A,$$

oder

$$r=\frac{A}{\frac{k}{A}+C\cos\varphi-B\sin\varphi}.$$

Dies ist die Gleichung eines **Kegelschnittes.** Hierdurch wäre nachgewiesen, dass die Planeten, falls keine andere Kraft, als die Sonne nach dem Newton'schen Gesetze, auf sie wirkte, sich in Kegelschnitten bewegen.

20. **Umkehrung.** Ein materieller Punkt beschreibt eine Ellipse, deren Halbaxen a und b sind, durch die Wirkung einer Kraft, deren Richtung beständig durch einen Brennpunkt der Ellipse geht. Der Ausdruck für diese Kraft soll gefunden werden.

Die Kraft soll eine Funktion der Entfernung r des Punktes vom Brennpunkte sein. $\varphi=f(r)$.

Es ist dann

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-f(r)\frac{x}{r};\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=-f(r)\frac{y}{r}.$$

Hieraus, wie früher

$$x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=0;$$

und weiter

$$xdy-ydx=Adt;$$

$$r^2d\varphi=Adt;\qquad dt=\frac{r^2d\varphi}{A}.$$

Weiter ergiebt sich

$$2dx\frac{d^2x}{dt^2} + 2dy\frac{d^2y}{dt^2} = -f(r)\frac{2xdx + 2ydy}{r}.$$

Aus $r^2 = x^2 + y^2$ folgt $rdr = xdx + ydy$;

also

$$d\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2}\right) = -2f(r)dr,$$

und

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = -2\int f(r)dr + 2B;$$

$$dx^2 + dy^2 = 2dt^2\left(B - \int f(r)dr\right).$$

Hier für dt den Wert $dt = \frac{r^2 d\varphi}{A}$ eingesetzt, giebt

$$dx^2 + dy^2 = \left(2B - 2\int f(r)dr\right)\frac{r^4 d\varphi^2}{A^2}.$$

Es ist

$$dx = -r\sin\varphi d\varphi + \cos\varphi dr$$
$$dy = r\cos\varphi d\varphi + \sin\varphi dr;$$

also

$$dx^2 + dy^2 = r^2 d\varphi^2 + dr^2,$$

folglich

$$A^2(r^2 d\varphi^2 + dr^2) = \left(2B - 2\int f(r)dr\right) r^4 d\varphi^2,$$

oder

$$d\varphi = \frac{Adr}{r\sqrt{r^2\left(2B - 2\int f(r)dr\right) - A^2}}$$

Diese Gleichung ist mit der Polargleichung der Ellipse

$$r = \frac{\frac{b}{a^2}}{1 + \frac{e}{a}\cos\varphi}$$

zu identificieren. Aus der letzteren folgt zunächst

$$\cos\varphi = \frac{b^2 - ar}{er};$$

differenziert, giebt

$$-\sin\varphi\, d\varphi = -\frac{b^2 dr}{er^2}.$$

Es ist

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{b^2 - ar}{er}\right)^2} = \frac{b\sqrt{-b^2 + 2ar - r^2}}{er};$$

folglich wird

$$d\varphi = \frac{b dr}{r\sqrt{-b^2 + 2ar - r^2}}.$$

Durch die Gleichsetzung der beiden Werte für $d\varphi$ bekommen wir somit

$$\frac{A dr}{r\sqrt{2Br^2 - 2r^2\int f(r) dr - A^2}} = \frac{b dr}{r\sqrt{-b^2 + 2ar - r^2}}.$$

Hieraus

$$A^2(-b^2 + 2ar - r^2) = b^2\left(2Br^2 - 2r^2\int f(r) dr - A^2\right),$$

oder

$$A^2\left(\frac{2a}{r} - 1\right) = b^2\left(2B - 2\int f(r)\, dr\right).$$

Differenziert in Beziehung auf die Variabele r, giebt

$$-\frac{2aA^2}{r^2} = -2b^2 f(r);$$

hieraus also

$$f(r) = \frac{aA^2}{b^2 r^2};$$

d. h. die anziehende Kraft ist umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung. So wäre aus dem II. Keplerschen Gesetze das Newton'sche Gesetz abgeleitet.

21. Die Kurve zu finden, welche ein Punkt beschreibt, der gegen ein festes Centrum dem Kubus

der Entfernung umgekehrt proportional angezogen wird. $\left(f(r) = \frac{\mu}{r^3}\right)$.

Die allgemeine Form der Gleichung für die Kurve, wie sie in 20. gefunden worden ist, war

$$d\varphi = \frac{Adr}{r\sqrt{2Br^2 - 2r^2\int f(r)dr - A^2}}.$$

Es wird hier

$$\int f(r)\,dr = \int \frac{\mu}{r^3} dr = -\frac{\mu}{2r^2};$$

also

$$d\varphi = \frac{Adr}{r\sqrt{2Br^2 + \mu - A^2}}.$$

1) Es sei $\mu - A^2 = 0$.

Dann wird

$$d\varphi = \frac{Adr}{r^2\sqrt{2B}},$$

und

$$\varphi = -\frac{A}{\sqrt{2B}} \cdot \frac{1}{r}.$$

Setzt man $-\frac{A}{\sqrt{2B}} = k$, so ist $\varphi = \frac{k}{r}$.

Die Kurve ist eine hyperbolische Spirale. —

2) Es sei $\mu - A^2 < 0 = -k^2$;

dann wird

$$d\varphi = \frac{Adr}{r\sqrt{2Br^2 - k^2}}.$$

Substituieren wir

$$2Br^2 - k^2 = z^2,$$

so folgt

$$4Brdr = 2zdz,$$

und
$$\frac{dr}{r} = \frac{z\,dz}{z^2 + k^2};$$
und
$$d\varphi = \frac{A\,dz}{z^2 + k^2};$$
also
$$\varphi = \frac{A}{k} \operatorname{arc\,tan} \frac{z}{k};$$
$$\varphi = \frac{A}{k} \operatorname{arc\,tan} \frac{\sqrt{2Br^2 - k^2}}{k};$$
oder
$$\tan \frac{k\varphi}{A} = \frac{\sqrt{2Br^2 - k^2}}{k};$$
und
$$r = \frac{k}{\sqrt{2B} \cdot \cos \frac{k\varphi}{A}}.$$
Für den speciellen Fall, dafs $A = k$, wird die Kurve eine gerade Linie, welche durch den Anfangspunkt geht.

3) Es sei $\mu - A^2 > 0 = +k^2$.

Dann
$$d\varphi = \frac{A\,dr}{r\sqrt{2Br^2 + k^2}}.$$
Substituiert man
$$2Br^2 + k^2 = z^2,$$
so wird
$$d\varphi = \frac{A\,dz}{z^2 - k^2},$$
und
$$\varphi = \frac{A}{2k}\, l\left(\frac{z - k}{z + k}\right).$$
Hieraus folgt

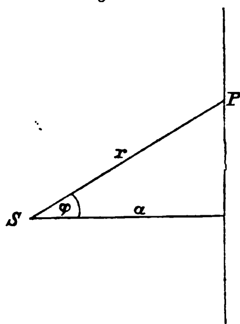
$$r = \frac{2ke^{\frac{k\varphi}{A}}}{\left(e^{\frac{2k\varphi}{A}} - 1\right)\sqrt{2B}}.$$

22. Wie müfste das Anziehungsgesetz lauten, wenn ein Planet sich in gerader Linie bewegte?

Wenn S die Sonne vorstellt, und die kürzeste Entfernung dieser von der Bahn gleich a wäre, so wäre die Gleichung der Bahn

$$\frac{a}{r} = \cos\varphi.$$

Fig. 4.



Hieraus ist $d\varphi$ abzuleiten. Differenziert, giebt zunächst

$$\frac{adr}{r^2} = \sin\varphi d\varphi;$$

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r};$$

$$\frac{adr}{r\sqrt{r^2 - a^2}} = d\varphi.$$

$$d\varphi = \frac{adr}{r\sqrt{r^2 - a^2}} = \frac{Adr}{r\sqrt{2Br^2 - 2r^2\int f(r)dr - A^2}},$$

$$\frac{a^2dr^2}{r^2(r^2 - a^2)} = \frac{A^2dr^2}{r^2(2Br^2 - 2r^2\int f(r)dr - A^2)},$$

oder

$$-2a^2\int f(r)\,dr = A^2 - 2a^2B.$$

Durch Differentiation folgt

$$f(r) = 0;$$

d. h. die Anziehungskraft müfste gleich Null sein.

23. Wie müfste das Anziehungsgesetz lauten, wenn die Bahn des Planeten ein Kreis wäre, die Sonne S aber nicht im Mittelpunkte, sondern etwas excentrisch ($CS = e$) stände?

Es ist für diesen Fall, wenn der Coordinatenursprung in den Mittelpunkt fällt,

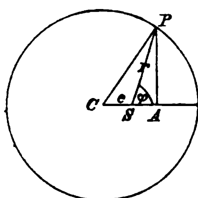


Fig. 5.

$$x = e + r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi.$$

$$x^2 + y^2 = e^2 + 2er\cos\varphi + r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = a^2,$$

wenn a der Radius des Kreises ist.

Hieraus folgt als Gleichung für den Kreis

$$\cos\varphi = \frac{a^2 - e^2 - r^2}{2er}.$$

Differenziert, giebt

$$-\sin\varphi d\varphi = \frac{-(a^2 - e^2)dr}{2er^2} - \frac{dr}{2e};$$

$$\sin\varphi d\varphi = \frac{a^2 - e^2 + r^2}{2er^2}dr.$$

Da $\sin\varphi = \frac{\sqrt{4e^2r^2 - (a^2 - e^2 - r^2)^2}}{2er}$, so ist

$$d\varphi = \frac{(a^2 - e^2 + r^2)dr}{r\sqrt{4e^2r^2 - (a^2 - e^2 - r^2)^2}}.$$

Wie früher ist zu identifizieren

$$\frac{Adr}{r\sqrt{2Br^2 - 2r^2\int f(r)dr - A^2}} = \frac{(a^2 - e^2 + r^2)dr}{r\sqrt{4e^2r^2 - (a^2 - e^2 - r^2)^2}};$$

hieraus $$\frac{4a^2A^2}{(a^2 - e^2 + r^2)^2} = 2B - 2\int f(r)dr,$$

und durch Differentiation folgt

$$f(r) = \frac{8a^2A^2r}{(a^2 - e^2 + r^2)^3}.$$

Somit hätte jeder Planet sein besonderes Anziehungsgesetz.

IV.

Bewegung eines Punktes auf einer Kurve.

24. Allgemeine Theorie. Auf einer starren Kurve, welche die Durchschnittslinie der Flächen

$$1)\quad F_1(x, y, z) = 0$$

und

$$2)\quad F_2(x, y, z) = 0$$

ist, bewegt sich ein Punkt infolge von beliebig vielen Kräften, die parallel zu den Axen des rechtwinkligen Coordinatensystems die Komponenten X, Y, Z liefern, welche Funktionen von x, y, z sind.

Die Bewegung beginnt zur Zeit Null mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 in einem Punkte, dessen Coordinaten die Werte a, b und c haben.

Es soll angegeben werden, auf welche Weise man die Coordinaten x, y, z des Punktes, ferner seine Geschwindigkeit v, endlich den auf die Bahn ausgeübten Druck und dessen Richtungswinkel gegen die drei Coordinatenaxen als Funktionen der Zeit t bestimmen kann.

Lösung. Die Bewegung eines Punktes auf einer vorgeschriebenen festen Linie läfst sich auf eine freie Bewegung desselben zurückführen, wenn man den Widerstand, welchen die Linie leistet, durch eine Normalkraft N ersetzt. Es gelten dann eben die für freie Bewegung bekannten Sätze und Gleichungen. N bilde mit den drei Coordinatenaxen die Winkel α, β, γ. Dann lauten die Differentialgleichungen der Bewegung:

$$3)\quad \frac{d^2x}{dt^2} = X + N\cos\alpha,$$

$$4)\quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y + N\cos\beta,$$

$$5)\quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z + N\cos\gamma.$$

Werden ferner die Winkel, welche die Tangente im Punkte xyz mit den drei Axen bildet, durch φ, ψ, χ bezeichnet, so hat man noch

$$\cos\alpha\cos\varphi + \cos\beta\cos\psi + \cos\gamma\cos\chi = 0,$$

oder

$$6)\quad \cos\alpha\frac{dx}{ds} + \cos\beta\frac{dy}{ds} + \cos\gamma\frac{dz}{ds} = 0,$$

wobei ds das Bogenelement.

Endlich ist

$$7)\quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Zwischen den acht Gröfsen x, y, z, α, β, γ, N und t bestehen also sieben Gleichungen. Mittelst derselben können die Coordinaten x, y, z, die Geschwindigkeit v, der Druck auf die Bahn und seine Richtungswinkel als Funktionen der Zeit bestimmt werden.

Zunächst ergiebt sich aus 3), 4) und 5)

$$8)\quad \frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz = Xdx + Ydy + Zdz;$$

hieraus, wenn man beachtet

$$v^2 = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2},$$

die Gleichung

$$9)\quad vdv = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Da nun X, Y, Z von x, y, z abhängen, x und y aber sich mittelst 1) und 2) als Funktionen von z darstellen lassen, so erhält man hieraus

$$vdv = F_3(z)dz,$$

und endlich

$$10)\quad v = F_4(z) + \text{Konst.},$$

wobei die Konstante sich aus der Bedingung ergiebt, dafs v gleich v_0 sein mufs, wenn z den Wert c hat.

Da nun ferner

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt}$$

ist, x und y aber ausdrückbar sind durch z, so giebt dies, verbunden mit 10), eine Gleichung von der Form

$$11)\quad z = F_5(t).$$

Hat man aber z als Funktion der Zeit, so hat man [nach 1) und 2)] auch x und y als solche; desgleichen [nach (10)] die Geschwindigkeit v.

Der von der Bahn auszuhaltende Druck endlich ist gleich dem Widerstande N. Dieser aber folgt aus 3) bis 5) unter Beachtung von 7):

$$12)\quad N = \pm \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)^2}$$

Auch liefern 3), 4) und 5) die Richtungswinkel des Druckes, nämlich

$$13)\quad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{\dfrac{d^2x}{dt^2} - X}{N}, \\[2ex] \cos\beta = \dfrac{\dfrac{d^2y}{dt^2} - Y}{N}, \\[2ex] \cos\gamma = \dfrac{\dfrac{d^2z}{dt^2} - Z}{N}. \end{cases}$$

Da man nun, nach dem Vorhergehenden, x, y, z, X, Y, Z durch t ausdrücken kann, so sind hiermit auch N, α, β und γ als Funktionen der Zeit bestimmt.

25. Es soll ein materieller Punkt betrachtet werden, der unter der Einwirkung der Schwere auf einer beliebigen **vertikalen Plankurve** eine gewisse Höhe herabfällt. Der Punkt falle auf der Kurve AC von E nach G. ($OF = h$; $OH = y$.) (Siehe Fig. 6.) Die positiven y sollen auf der vertikalen y-Axe von oben nach unten gezählt werden; mit s werde der Bogen, von der y-Axe aus gerechnet, bezeichnet

und mit g die Beschleunigung der Schwere, welche in der Richtung der positiven y wirkt.

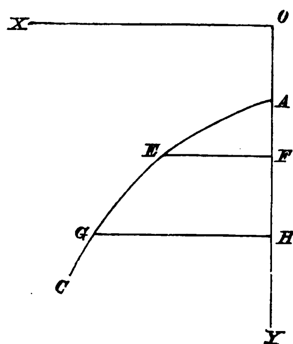


Fig. 6.

Da $X = Z = 0$, $Y = g$ in diesem Falle ist, so geht 9) in 24. über in

$$v\,dv = g\,dy.$$

Sei nun in dem Augenblicke, in welchem y den Wert h hat, die Geschwindigkeit Null, so folgt, da $v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ ist,

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2g\int_h^y dy;$$

und

$$1)\quad dt = \frac{ds}{\sqrt{2g(y-h)}}.$$

Bezeichnet aber c den Wert der Geschwindigkeit in dem Augenblicke, in welchem y den Wert h hat, so ist offenbar

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - c^2 = 2g(y-h);$$

und

$$2)\quad dt = \frac{ds}{\sqrt{c^2 + 2g(y-h)}}.$$

Diese Formeln 1) und 2) sind anzuwenden, wenn der Bogen EG in der Richtung der positiven y durchlaufen wird, und wenn die Schwerkraft auch in der Richtung der positiven y wirkt.

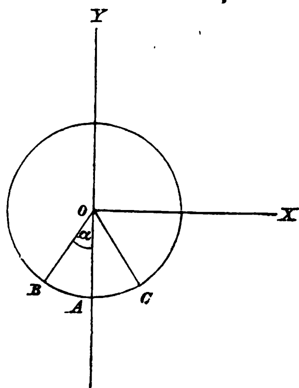
Dagegen mufs man den Differentialen dt und ds verschiedene Vorzeichen geben und das Vorzeichen von g ändern, wenn die positive y-Axe nach oben gezogen wird. Für diesen Fall gehen die Formeln 1) und 2) über bezüglich in

$$3)\quad dt = -\frac{ds}{\sqrt{2g(h-y)}};$$

$$4)\ dt = -\frac{ds}{\sqrt{c^2 + 2g(h-y)}}.$$

26. Bewegung auf einem vertikalen Kreise. Der Radius des Kreises sei l; der Coordinatenursprung O falle in den Kreismittelpunkt. Der Punkt soll nur der Schwerkraft g unterliegen.

Fig. 7.



Es ist hier $X = Z = 0$;

$$Y = -g;$$

nach 24, 9 wird dann

$$v^2 = -2\int g\,dy;$$

oder

$$v^2 = C - 2gy.$$

Im untersten Punkte A der Bahn $(-y = l)$ soll v gleich c sein; dann wird

$$v^2 = c^2 - 2g(y + l),$$

oder

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}$$

$$= c^2 - 2g(y + l).$$

Aus der Gleichung des Kreises

$$x^2 + y^2 = l^2$$

folgt

$$dx^2 = \frac{y^2 dy^2}{l^2 - y^2};$$

mithin

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dy^2}{dt^2} \cdot \frac{l^2}{l^2 - y^2};$$

also

$$\frac{dy^2}{dt^2} \cdot \frac{l^2}{l^2 - y^2} = c^2 - 2g(y + l),$$

oder

$$dt = \frac{l\,dy}{\sqrt{[c^2 - 2g(y + l)](l^2 - y^2)}},$$

also

$$t = l \int \frac{dy}{\sqrt{[c^2 - 2g(y+l)](l^2 - y^2)}}.$$

Es sind nun 3 Fälle hier zu unterscheiden:

$$c^2 \gtreqless 4gl.$$

1. Ist $c^2 > 4gl$, d. h. $\frac{4gl}{c^2} < 1$, $(k^2 < 1)$, so wird, wenn man substituiert

$$x = -l \cos 2\varphi,$$

$$t = \frac{2l}{c} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}};$$

oder

$$t = \frac{2l}{c} F(k, \varphi) + C.$$

2. Ist $c^2 = 4gl$, d. h. $\frac{4gl}{c^2} = 1$, $(k^2 = 1)$,

so wird bei derselben Substitution

$$t = \frac{2l}{c} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\varphi}},$$

oder

$$t = \frac{2l}{c} \int \frac{d\varphi}{\cos\varphi},$$

oder

$$t = \frac{l}{c} l \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi}.$$

3. Ist $c^2 < 4gl$, d. h. $\frac{c^2}{4gl} < 1$, $(k^2 < 1)$,

so substituiere man

$$2g(y + l) = c^2 \sin^2\varphi,$$

also

$$y + l = \frac{c^2 \sin^2\varphi}{2g},$$

und

$$y = \frac{c^2 \sin^2\varphi}{2g} - l,$$

$$dy = \frac{c^2 \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi}{g};$$

$$l^2 - y^2 = (l + y)(l - y) = \frac{c^2 \sin^2\varphi}{2g}\left(2l - \frac{c^2 \sin^2\varphi}{2g}\right).$$

Hierdurch geht die Formel für t über in

$$t = l\int \frac{c^2 \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi}{g\sqrt{\left(c^2 - c^2 \sin^2\varphi\right)\left(2l - \frac{c^2 \sin^2\varphi}{2g}\right)\frac{c^2 \sin^2\varphi}{2g}}},$$

oder

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}};$$

oder

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\, F(k, \varphi).$$

Die Geschwindigkeit v wird Null werden für $-y = l - \frac{c^2}{2g}$. Es sei dies im Punkte B der Fall. Im untersten Punkte A der Bahn $(-y = l)$ ist v gleich c. Führen wir den Winkel $B\hat{O}A = \alpha$ ein, so wird für den Punkt B: $-y = l\cos\alpha$ sein;

also

$$l \cos\alpha = l - \frac{c^2}{2g},$$

oder

$$4gl \sin^2\frac{\alpha}{2} = c^2,$$

$$\frac{c^2}{4gl} = \sin^2\frac{\alpha}{2} = k^2.$$

α heißt der Ausschlagswinkel.

Soll man die Zeit T berechnen, die der Punkt, um

von B nach A zu gelangen, d. i. die Zeit für eine halbe Schwingung, so folgt zunächst aus der Substitutionsgleichung

$$2g(y+l)=c^2\sin^2\varphi$$

für Punkt $A(-y=l)$: $\sin\varphi=0$; also $\varphi=0$;

für Punkt $B(-y=l\cos\alpha)$: $\sin\varphi=1$; also $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

Folglich wird

$$T=\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};$$

oder

$$T=\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{\pi}{2}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\left(\frac{1.2}{3.4}\right)^2\sin^4\frac{\alpha}{2}+\ldots\ldots\right).$$

Ist nun der Winkel α sehr klein, so darf man $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2}$ setzen und darf ferner das Quadrat der sehr kleinen Größe und eben recht die übrigen Glieder der Reihe vernachlässigen.

Es wird dann

$$T=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Der materielle Punkt gebraucht, um sich von A aus nach C zu derselben Höhe, die er in B hatte, zu erheben, offenbar dieselbe Zeit, welche er gebrauchte, um von B nach A herabzusteigen. Die Dauer einer Schwingung, d. h. die Zeit, welche der materielle Punkt gebraucht, um den Bogen BAC zu durchlaufen, ist das Doppelte dieses Wertes von T; also

$$T_1=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Folglich ist die Dauer kleiner Kreisschwingungen eines materiellen Punktes unabhängig von der Weite dieser Schwingungen: wegen dieser Eigenschaft nennt man die Oscillationen isochron. **(Einfaches oder mathematisches Pendel; Kreispendel.)**

27. Ein Punkt bewege sich auf einem Kreise mit konstanter Geschwindigkeit. Wie grofs mufs die normal wirkende Kraft sein, um den Punkt in seiner Bewegung auf dem Kreise zu erhalten?

Es bezeichne N die normal wirkende Kraft, welche in der Ebene des Kreises wirkt. Sie ist entweder nach dem Mittelpunkte hin, oder von dem Mittelpunkte aus gegen die Peripherie des Kreises gerichtet. (Centripetal- oder Centrifugalkraft). Da keine beschleunigenden Kräfte wirken, so ist $X = Y = 0$.

Nach 24. ist sodann

$$\frac{d^2x}{dt^2} = N \cos\alpha,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = N \cos\beta;$$

es ist

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}; \quad \cos\beta = \frac{y}{r};$$

also

$$\frac{d^2x}{dt^2} = N\frac{x}{r}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = N\frac{y}{r}.$$

Durch Differentiation folgt aus der Gleichung des Kreises

$x^2 + y^2 = r^2$, (wenn r der Radius ist),

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0;$$

und weiter

$$x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = 0;$$

oder

$$x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + v^2 = 0,$$

oder

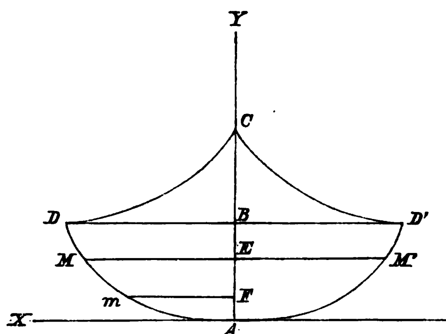
$$x^2\frac{N}{r} + y^2\frac{N}{r} + v^2 = 0,$$

oder

$$N = \pm\frac{v^2}{r}.$$

28. **Bewegung auf der Cycloide.** DAD' sei eine Cycloide, deren Basis DD' horizontal ist; ferner sei A der tiefste

Fig. 8.



Punkt der Kurve und AB der Durchmesser des erzeugenden Kreises gleich $2a$. Der Punkt soll längs der Kurve von M nach m fallen in der Zeit t. Es sei $AE = h$; $AF = y$. Die Differentialgleichung der Cycloide ist, wenn man die Tangente im Scheitel zur Axe der x und die Senkrechte auf die Basis zur Axe der y nimmt:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{2a - y}}.$$

Da $ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ ist, so folgt

$$ds = dy \cdot \sqrt{\frac{2a - y}{y}} \cdot \sqrt{1 + \frac{y}{2a - y}},$$

oder

$$ds = dy \sqrt{\frac{2a}{y}}.$$

In diesem Falle ist die Formel 3) in 25. zur Bestimmung der Zeit t anzuwenden:

$$dt = -\frac{ds}{\sqrt{2g(h - y)}},$$

vorausgesetzt, dass die Anfangsgeschwindigkeit gleich Null ist. Wenn man hier für ds den Wert einsetzt, so erhält man

$$dt = -\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \frac{dy}{\sqrt{hy - y^2}}.$$

Die Integration ergiebt

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \arccos \frac{2y - h}{h}$$

als Ausdruck für die Zeit, welche der materielle Punkt gebraucht, um von M bis m zu fallen.

Der Ausdruck für die Zeit T, welche der materielle Punkt gebraucht, um von M nach A zu gelangen, ist also

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Die Zeit, welche ein materieller Punkt gebraucht, um auf einem Cycloidenbogen bis zum tiefsten Punkt herabzusteigen, ist demnach unabhängig von der Länge dieses Bogens. Diese Eigenschaft, welche den Kurven, denen sie zukommt, den Namen Tautochronen verleiht, gehört nur der Cycloide und den Kurven doppelter Krümmung an, welche man bildet, wenn man die die Cycloide enthaltende Ebene um einen vertikalen Cylinder von beliebiger Grundfläche herumlegt. Der Körper, der in A angelangt ist, steigt bis zur Höhe h, wo in M' seine Geschwindigkeit Null wird, in derselben Zeit empor, die er zum Herabsteigen gebraucht hat; und die Schwingungsdauer beträgt also:

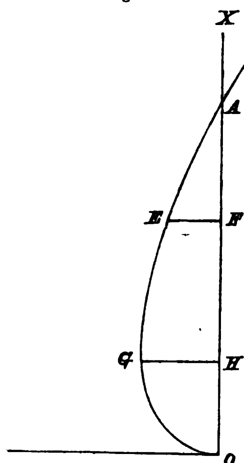
$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}} = \pi \sqrt{\frac{4a}{g}}.$$

Nun ist der Krümmungshalbmesser im tiefsten Punkt der Cycloide $4a$. Folglich dauert eine Schwingung auf dieser Kurve für jede Amplitude ebenso lange, wie auf dem Krümmungskreis ihres tiefsten Punktes bei unendlich kleinen Amplituden. **(Cykloidenpendel.)**

29. Bewegung auf der Kurve: $9py^2=(x-3p)^2x$. —

1. Die Axe der Kurve sei vertikal aufwärts gerichtet. O sei der Coordinatenursprung und OA die positive x-Axe.

Fig. 9.



Es sei $OF=h$, und $OH=x$. Es bezeichne s den Bogen, in der Richtung der positiven x gezählt. Der materielle Punkt falle auf der Kurve von E nach G in der Zeit t, welche bestimmt werden soll.

a. Die Anfangsgeschwindigkeit sei gleich Null.

Nach 25, 3), ist

$$\sqrt{2g}\cdot dt=-\frac{ds}{\sqrt{h-x}}.$$

Aus $9py^2=(x-3p)^2x$ folgt

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-p}{2\sqrt{px}},$$

und

$$ds=\frac{x+p}{2\sqrt{px}}\,dx.$$

Mithin ist

$$2\sqrt{2g}\cdot dt=-\frac{x+p}{\sqrt{px(h-x)}}\,dx;$$

und

$$2\sqrt{2gp}\cdot t=\int_x^h\frac{x+p}{\sqrt{x(h-x)}}\,dx;$$

oder

$$2\sqrt{2gp}\cdot t=p\cdot\int_x^h\frac{dx}{\sqrt{x(h-x)}}+\int_x^h\frac{x\,dx}{\sqrt{x(h-x)}}.$$

Es ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(h-x)}} = \arcsin \frac{2x-h}{h};$$

und

$$p\int_x^h \frac{dx}{\sqrt{x(h-x)}} = p \cdot \arccos \frac{2x-h}{h};$$

ferner

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x(h-x)}} = -\sqrt{x(h-x)} + \frac{h}{2} \arcsin \frac{2x-h}{h};$$

und

$$\int_x^h \frac{x\,dx}{\sqrt{x(h-x)}} = \sqrt{x(h-x)} + \frac{h}{2} \arccos \frac{2x-h}{h}.$$

Folglich ist

$$2\sqrt{2gp} \cdot t = \sqrt{x(h-x)} + \left(p + \frac{h}{2}\right) \arccos \frac{2x-h}{h};$$

oder

$$2\sqrt{2gp} \cdot t = \sqrt{x(h-x)} + \left(p + \frac{h}{2}\right) \arcsin \frac{2\sqrt{x(h-x)}}{\mathrm{h}}.$$

Es bezeichne τ die Zeit, welche vergeht, bis der Punkt in O angelangt ist. Es ist dann

$$2\sqrt{2gp} \cdot \tau = \left(p + \frac{h}{2}\right) \pi.$$

Ist $h = 4p$ und τ_1 die Zeit, welche ein Körper braucht, um frei durch die Höhe $4p$ zu fallen, so ergiebt sich

$$\frac{\tau}{\tau_1} = 1{,}18,$$

d. h. die Fallzeit längs der Kurve ist ungefähr $1\,{}^1/_5$ mal vermehrt.

b) Die Anfangsgeschwindigkeit sei gleich c.

Nach 25, 4) ist

$$dt = -\frac{ds}{\sqrt{c^2 + 2g(h-x)}}.$$

Wie bei a) folgt leicht

$$dt = -\frac{x+p}{2\sqrt{ax}\,\sqrt{c^2 + 2g(h-x)}}\,dx;$$

und

$$2\sqrt{p}\cdot t = -\int\limits_h^x \frac{x+p}{\sqrt{x[c^2 + 2g(h-x)]}}\,dx,$$

oder

$$2\sqrt{p}\,.\,t = p\int\limits_x^h \frac{dx}{\sqrt{(2gh+c^2)x - 2gx^2}} + \int\limits_x^h \frac{xdx}{\sqrt{(2gh+c^2)x - 2gx^2}}$$

Es ist nun

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(2gh+c^2)x - 2gx^2}} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\arcsin\frac{2g(2x-h)-c^2}{2gh+c^2}.$$

und

$$\int\limits_x^h \frac{dx}{\sqrt{(2gh+c^2)x - 2gx^2}} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\left(\arcsin\frac{2gh-c^2}{2gh+c^2} - \arcsin\frac{2g(2x-h)-c^2}{2gh+c^2}\right);$$

ferner

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{(2gh+c^2)x - 2gx^2}} = -\frac{\sqrt{(2gh+c^2)x - 2gx^2}}{2g} + \frac{2gh+c^2}{4g}\int \frac{dx}{\sqrt{(2gh+c^2)x - 2gx^2}},$$

und

$$\int_x^h \frac{x\,dx}{\sqrt{(2gh+c^2)x-2gx^2}} = \frac{\sqrt{(2gh+c^2)x-2gx^2}-c\sqrt{h}}{2g}$$

$$+\frac{2gh+c^2}{4g\sqrt{2g}}\left(\arcsin\frac{2gh-c^2}{2gh+c^2}\right.$$

$$\left.-\arcsin\frac{2g(2x-h)-c^2}{2gh+c^2}\right).$$

Mithin ist

$$2\sqrt{p}\cdot t = \frac{\sqrt{(2gh+c^2)x-2gx^2}-c\sqrt{h}}{2g}$$

$$+\frac{1}{4g\sqrt{2g}}\left(4gp+2gh+c^2\right)\left(\arcsin\frac{2gh-c^2}{2gh+c^2}\right.$$

$$\left.-\arcsin\frac{2g(2x-h)-c^2}{2gh+c^2}\right),$$

oder

$$2\sqrt{2gp}\cdot t = \frac{\sqrt{(2gh+c^2)x-2gx^2}-c\sqrt{h}}{\sqrt{2g}}$$

$$+\left(p+\frac{2gh+c^2}{4g}\right)\arcsin\frac{2\sqrt{2g}}{(2gh+c^2)^2}\Big[(2gh-c^2)\sqrt{(2gh+c^2)x-2gx^2}$$

$$-c\left[2g(2x-h)-c^2\right]\sqrt{h}\Big].$$

Hat τ dieselbe Bedeutung wie bei a), so folgt

$$2\sqrt{2gp}\cdot\tau = -c\sqrt{\frac{h}{2g}}+\left(p+\frac{2gh+c^2}{4g}\right)\arcsin\frac{2c\sqrt{2gh}}{2gh+c^2}.$$

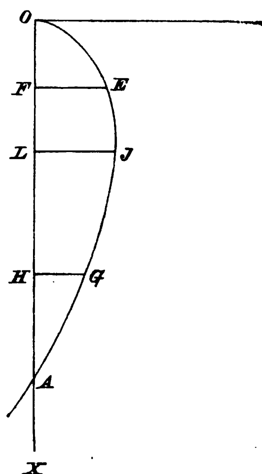
Für $h=4p$ und $c=2\sqrt{p}$ ergiebt sich

$$\frac{\tau}{\tau_1}=1,22..,$$

d. h. die Fallzeit längs der Kurve ist auch hier ungefähr $1\frac{1}{5}$ mal vermehrt.

2. **Die Axe der Kurve sei vertikal abwärts gerichtet.** Es stelle OGA die Kurve in dieser Gestalt dar. O sei der Coordinatenursprung und OA die positive x-Axe. Es sei $OF = h$, und $OH = x$. Es bezeichne s den Bogen, in der Richtung der positiven x gezählt. Der materielle Punkt falle auf der Kurve von E nach G in der Zeit t, welche man sucht.

Fig. 10.



a) Die Anfangsgeschwindigkeit sei gleich Null.

Nach 25, 1) ist

$$\sqrt{2g} \cdot dt = \frac{ds}{\sqrt{x - h}}.$$

Wie bei 1, a) folgt

$$\sqrt{2gp} \cdot t = \int_h^x \frac{x + p}{\sqrt{x(x - h)}} dx,$$

oder

$$2\sqrt{2gp} \cdot t = p \int_h^x \frac{dx}{\sqrt{x(x - h)}} + \int_h^x \frac{x dx}{\sqrt{x(x - h)}}.$$

Es ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(x - h)}} = l\left(2x - h + 2\sqrt{x(x - h)}\right);$$

und

$$\int_h^x \frac{dx}{\sqrt{x(x - h)}} = p \cdot l \frac{2x - h + 2\sqrt{x(x - h)}}{h};$$

ferner

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x(x-h)}} = \sqrt{x(x-h)} + \frac{h}{2} l\left(2x - h + 2\sqrt{x(x-h)}\right);$$

und

$$\int_h^x \frac{x dx}{\sqrt{x(x-h)}} = \sqrt{x(x-h)} + \frac{h}{2} l \frac{2x - h + 2\sqrt{x(x-h)}}{h}.$$

Mithin ist

$$2\sqrt{2gp} \cdot t = \sqrt{x(x-h)} + \left(p + \frac{h}{2}\right) l \frac{2x - h + 2\sqrt{x(x-h)}}{h}.$$

Fällt der materielle Punkt vom Kulminationspunkte in Bezug auf die x-Axe auf der Kurve die Höhe $4p$ herab, d. h. ist $h = p$, und $x = 5p$, und ist t die hierbei verstreichende Zeit, so ist

$$2\sqrt{2gp} \cdot \tau = \left(2\sqrt{5} + \frac{3}{2} l(g + 4\sqrt{5})\right)p.$$

In diesem Falle ergiebt sich

$$\frac{\tau}{\tau_1} = 1{,}09;$$

also die Fallzeit längs der Kurve ist ganz wenig vermehrt.

b) Die Anfangsgeschwindigkeit sei gleich c. Nach 25, 2) ist

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{c^2 + 2g(x-h)}}.$$

Man erhält leicht

$$2\sqrt{p} \cdot t = \int_h^x \frac{x + p}{\sqrt{2gx^2 + (c^2 - 2gh)x}} dx,$$

oder

$$2\sqrt{p} \cdot t = p \int_h^x \frac{dx}{\sqrt{(c^2 - 2gh)x + 2gx^2}} + \int_h^x \frac{x dx}{\sqrt{(c^2 - 2gh)x + 2gx^2}}.$$

Es ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(c^2 - 2gh)\,x - 2gx^2}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2g}}\, l\left(c^2 - 2gh + 4gx + 2\sqrt{2g\,[(c^2 - 2gh)\,x + 2gx^2]}\right);$$

$$p\int_h^x \frac{dx}{\sqrt{(c^2 - 2gh)\,x - 2gx^2}} =$$

$$\frac{p}{2g}\, l\, \frac{c^2 - 2gh + 4gx + 2\sqrt{2g\,[(c^2 - 2gh)\,x + 2gx^2]}}{(c + \sqrt{2gh})^2};$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(c^2 - 2gh)\,x - 2gx^2}} = \frac{\sqrt{(c^2 - 2gh)\,x + 2gx^2}}{2g}$$

$$-\frac{c^2 - 2gh}{4g\sqrt{2g}}\, l\left(c^2 - 2gh + 4gx + 2\sqrt{2g\,[(c^2 - 2gh)\,x + 2gx^2]}\right);$$

$$\int_h^x \frac{x\,dx}{\sqrt{(c^2 - 2gh)\,x + 2gx^2}} = \frac{\sqrt{(c^2 - 2gh)\,x + 2gx^2} - c\sqrt{h}}{2g}$$

$$-\frac{c^2 - 2gh}{4g\sqrt{2g}}\, l\, \frac{c^2 - 2gh + 4gx + 2\sqrt{2g\,[(c^2 - 2gh)\,x + 2gx^2]}}{(c + \sqrt{2gh})^2}.$$

Folglich wird nun

$$2\sqrt{p}\cdot t = \frac{\sqrt{(c^2 - 2gh)\,x + 2gx^2} - c\sqrt{h}}{2g}$$

$$+\left(\frac{p}{\sqrt{2g}} - \frac{c^2 - 2gh}{4g\sqrt{2g}}\right) l\, \frac{c^2 - 2gh + 4gx + 2\sqrt{2g\,[(c^2 - 2gh)\,x + 2gx^2]}}{(c + \sqrt{2gh})^2},$$

oder

$$2\sqrt{2gp}\cdot t = \frac{\sqrt{(c^2 - 2gh)\,x + 2gx^2} - c\sqrt{h}}{\sqrt{2g}}$$

$$+\left(p - \frac{c^2 - 2gh}{4g}\right) l\, \frac{c^2 - 2gh + 4gx + 2\sqrt{2g\,[(c^2 - 2gh)\,x + 2gx^2]}}{(c + \sqrt{2gh})^2}.$$

Für den Fall, dass $h = p$, $x = 5p$, $c = 3\sqrt{p}$ ist und τ dieselbe Bedeutung wie in a) hat, ergiebt sich

$$\frac{\tau}{\tau_1} = 1,\ 12,$$

d. h. die Fallzeit längs der Kurve ist auch hier nur sehr wenig vermehrt.

30. Bewegung auf einer Schraubenlinie. — Unter der alleinigen Wirkung der Schwere rollt auf einer Schraubenlinie, deren Axe senkrecht steht, ein Punkt herab. Die Bewegung beginne mit der Anfangsgeschwindigkeit A. Der Steigungswinkel der Schraubenlinie sei α, der Halbmesser derselben gleich a. Sie werde auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen, dessen z-Axe vertikal nach unten gerichtet ist, und von dessen x-Axe aus die Bewegung erfolgt. Wenn man noch mit b den Ausdruck $a \tan \alpha$ (den Parameter der Schraubenlinie) bezeichnet, so lauten die Gleichungen der Linie bekanntlich:

$$x = a \cos \varphi;\ y = a \sin \varphi;\ z = b\varphi.$$

Es war nach 24, 9)

$$vdv = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Im vorliegenden Fall ist

$$X = Y = 0;\ Z = g;$$

also

$$vdv = gdz,$$

und

$$v^2 = 2gz + \text{Konst.}$$

Da $v = A$ für $z = 0$ sein soll, so wird

$$\text{Konst.} = A;$$

mithin

$$v^2 = 2gz + A.$$

Es ist

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{(a^2 + b^2)\,d\varphi^2}{dt^2};$$

folglich

$$\frac{(a^2+b^2)\,d\varphi^2}{dt^2}=2\,gb\varphi+A.$$

Setzen wir

$$\sqrt{2\,gb\varphi+A}=u,$$

so wird

$$dt=\frac{\sqrt{a^2+b^2}\cdot du}{gb},$$

und

$$t=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{gb}\sqrt{2\,gb\varphi+A}+B \text{ (wo } B \text{ eine Konstante)},$$

oder

$$t=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{gb}\sqrt{2\,gz+A}+B;$$

d. h. die Fallzeit ist dem Quadrate der Zeit proportional.

V.

Bewegung eines Punktes auf einer Fläche.

31. **Allgemeine Theorie.** — Die Gleichung der Fläche sei $F(x, y, z)=0$. Um den Punkt als freien ansehen zu können, denke man sich den Widerstand, welchen die Fläche leistet, durch eine Kraft N ersetzt, die in der Richtung der Normalen wirkt; letztere bilde mit den Coordinatenaxen die Winkel α, β, γ. Die Totalkomponenten der äufseren beschleunigenden Kräfte seien X, Y, Z. Dann lauten die Differentialgleichungen der Bewegung:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=X+N\cos\alpha;$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = Y + N\cos\beta;$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = Z + N\cos\gamma.$$

Es ist nun

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}};$$

$$\cos\beta = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{N}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} = \lambda,$$

so wird

$$1)\quad \frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda\frac{\partial F}{\partial x};$$

$$2)\quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda\frac{\partial F}{\partial y};$$

$$3)\quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda\frac{\partial F}{\partial z}.$$

Um λ zu eliminieren, multipliziere man die Gleichungen

1), 2) und 3) beziehungsweise mit $2\,dx$, $2\,dy$ und $2\,dz$, und addiere. Man erhält dann unter Beachtung von

$$dF(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy + \frac{\partial F}{\partial z}\,dz = 0;$$

und

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

die Gleichung

$$4)\quad v^2 = 2\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) + \text{Konst.}$$

Die Konstante bestimmt sich aus irgend einem als gegeben vorliegenden Bewegungszustande (gewöhnlich dem anfänglichen).

Um die Coordinaten x, y, z durch t ausdrücken zu können, braucht man drei Gleichungen, in denen nur diese vier Veränderlichen vorkommen. Eine dieser Gleichungen ist die der Fläche; die beiden anderen lassen sich aus 1), 2) und 3) herleiten, indem man N eliminiert.

Wenn x, y, z als Funktionen von t bestimmt sind, so ergeben sich durch Wegschaffung von t Gleichungen zwischen x und y, x und z, y und z; dies sind die Projektionen der Bahn.

Endlich kann eine der Gleichungen 1), 2), 3), oder eine Verbindung derselben dazu dienen, die Normalkraft N zu finden. Hiermit hat man dann auch den senkrechten Druck, welchen die Fläche erleidet, denn er ist N gleich, nur entgegengesetzt gerichtet.

32. **Bewegung auf einem Kreiscylinder.** — Ein schwerer Punkt bewege sich auf einem Kreiscylinder mit der Geschwindigkeit c, und es sollen auf denselben keine beschleunigenden Kräfte wirken. Man soll die Bahn bestimmen.

Die Gleichung des Cylinders sei $x^2 + y^2 = a^2$. Die Differentialgleichungen der Bewegung lauten in diesem Falle:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda \frac{\partial F}{\partial x};$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \lambda \frac{\partial F}{\partial y};$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \lambda \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Es wird hier

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0;$$

also

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\lambda x;$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\lambda y;$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Es folgt sofort

$$z = a't + b.$$

Setzt man nun

$$x = a\cos\varphi; \quad y = a\sin\varphi,$$

so wird

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{a^2 d\varphi^2 + a^2 dt^2}{dt^2} = c^2,$$

oder

$$\varphi = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{a} t + C.$$

Es möge die Bewegung beginnen bei $x = a$, $y = 0$, $z = 0$; dann wird

$$C = 0.$$

Setzen wir

$$\frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{a} = k,$$

dann wird

$$\varphi = kt;$$

folglich

$$x = a\cos kt;\ y = a\sin kt;\ z = a't.$$

Dies sind die drei Gleichungen der Kurve. Es folgt noch

$$\frac{z}{a'} = t;\ \text{also auch}\ \frac{kz}{a'} = kt;$$

und da $\tan kt = \frac{y}{x}$ ist, so ist

$$\tan\left(\frac{kz}{a'}\right) = \frac{y}{x}.$$

Die Kurve ist eine Schraubenlinie.

33. **Bewegung auf der Kugel.** — Die Gleichung der Kugel sei:

$$1)\quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Die positive z-Axe sei nach unten gezogen, und die Schwere sei die einzige wirkende Kraft. Dann ist

$$X = 0;\ Y = 0;\ Z = g;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x;\quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y;\quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z;$$

und die Gleichungen der Bewegung werden:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\lambda x;$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\lambda y;$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g + 2\lambda z.$$

Eliminiert man λ aus den beiden ersten Gleichungen, so erhält man

$$y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2} = 0;$$

also

$$y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = A \text{ (wo } A \text{ eine Konstante);}$$

oder

$$2)\ ydx - xdy = Adt.$$

Es ist

$$v^2 = 2\int(Xdx + Ydy + Zdz);$$

hier

$$v^2 = 2gz + c \text{ (wo } c \text{ eine Konstante),}$$

oder

$$3)\ \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = 2gz + c.$$

Die Gleichungen 1), 2) und 3) reichen hin, um x, y, z als Funktion von t auszudrücken.

Wir erhalten zunächst, indem wir die Kugelgleichung differenziieren:

$$4)\ xdx + ydy = -zdz;$$

das Addieren der Quadrate von 2) und 4) giebt:

$$(x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2) = A^2dt^2 + z^2dz^2;$$

oder

$$dx^2 + dy^2 = \frac{A^2dt^2 + z^2dz^2}{x^2 + y^2}.$$

Aus der Kugelgleichung folgt:

$$x^2 + y^2 = r^2 - z^2;$$

also wird

$$dx^2 + dy^2 = \frac{A^2dt^2 + z^2dz^2}{r^2 - z^2}.$$

In Verbindung mit 3) erhält man

$$(2gz + c)dt^2 = \frac{A^2dt^2 + z^2dz^2}{r^2 - x^2} + dz^2;$$

oder

$$5)\quad dt = \frac{\pm r\,dz}{\sqrt{(r^2 - z^2)(2gz + c) - A^2}}.$$

Dabei bezieht sich das Zeichen — auf den Fall, wo das Bewegliche steigt, und das Zeichen + auf den, wo es fällt.

Die Integration führt auf ein elliptisches Integral.



Bewegung von Systemen materieller Punkte.

VI.

Prinzip von d'Alembert.

34. Es sollen Verbindungen zwischen den Punkten des Systems bestehen, und diese Verbindungen seien ausgedrückt durch k Gleichungen:

$$L=0,\ M=0,\ N=0, \ldots\ldots,$$

denen die Zeit und die Coordinaten der Punkte, auf welche Kräfte wirken, in jedem Augenblicke zu genügen haben. Bezeichnet n die Anzahl der materiellen Punkte, so hat man zwischen ihren $3n$ Coordinaten und der Zeit noch $3n-k$ Gleichungen zu finden. Hat man dies erreicht, so vermag man für jeden Augenblick die Lagen sämtlicher Punkte, folglich auch alle Umstände der Bewegung anzugeben. Die fehlenden $3n-k$ Gleichungen werden mit Hülfe des d'Alembert'schen Prinzips erhalten.

35. Dieses Prinzip führt die Bestimmung der Bewegung irgend eines Systems auf die Betrachtung des Gleichgewichts zurück.

Kräfte, welche auf Punkte wirken, die gewissen Verbindungen unterworfen, bringen im allgemeinen nicht dieselben Bewegungen hervor, wie wenn die Punkte getrennt und frei wären. Betrachten wir eine der von aussen auf

das System wirkenden Kräfte, so kann man diese in zwei andere Kräfte zerlegen, deren eine diesem Punkte die Bewegung, welche er wirklich annimmt, erteilen würde, wenn er frei wäre; offenbar veranlafst diese erste Komponente (die bewahrte Kraft des materiellen Punktes) allein die Bewegung des Punktes, und die zweite Komponente (die verlorene Kraft des materiellen Punktes) wird durch die zwischen den Teilen des Systems eintretenden inneren Kräfte aufgehoben. Folglich wird dem System eine solche Bewegung erteilt, dafs die verlorenen Kräfte sich gegenseitig aufheben oder kraft der Verbindung der materiellen Punkte unter einander sich beständig das Gleichgewicht halten. Dies ist **d'Alemberts Prinzip.**

36. Haben wir die Bedingungen eines Systems von Punkten, auf welche Kräfte wirken, durch Kräfte ersetzt, von denen wir wissen, dafs sie sich das Gleichgewicht halten, so ist damit die bedingte Bewegung umgewandelt in eine freie, und die Untersuchung beschränkt sich also wesentlich darauf, die Kräfte zu finden, die sich das Gleichgewicht halten.

Wir bezeichnen

durch $m, m', \ldots\ldots$ die Massen der einzelnen materiellen Punkte;

durch $x, y, z; x', y', z'; \ldots\ldots$ die drei rechtwinkligen Coordinaten der Punkte am Ende der Zeit t;

durch $X, Y, Z; X', Y', Z'; \ldots\ldots$ die Komponenten der auf die materiellen Punkte wirkenden Kräfte;

durch $P, Q, R; P', Q', R'; \ldots\ldots$ die Komponenten der Kräfte, welche die Bedingungsgleichungen ersetzen.

Dann gelten für die Bewegung der einzelnen Punkte im System bez. die Gleichungen:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + P; \qquad m'\frac{d^2x'}{dt^2} = X' + P'; \ldots$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + Q; \qquad m'\frac{d^2y'}{dt^2} = Y' + Q'; \ldots .$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + R; \qquad m'\frac{d^2z'}{dt^2} = Z' + R'; \ldots .$$

Im Ganzen haben wir also $3n$ solcher Gleichungen. Aus diesen Gleichungen erhält man nun die Kräfte, welche die Bedingungen des Systems ersetzen, und welche zusammen sich das Gleichgewicht halten müssen; nämlich

$$P = m\frac{d^2x}{dt^2} - X; \qquad P' = m'\frac{d^2x'}{dt^2} - X'; \ldots .$$

$$Q = m\frac{d^2y}{dt^2} - Y; \qquad Q' = m'\frac{d^2y'}{dt^2} - Y'; \ldots .$$

$$R = m\frac{d^2z}{dt^2} - Z; \qquad R' = m'\frac{d^2z'}{dt^2} - Z'; \ldots .$$

37. Es handelt sich nun darum, aus dem Prinzip von d'Alembert im Verein mit dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten die Differentialgleichungen der Bewegung eines Systems herzuleiten. Die virtuellen Momente drücken sich aus durch

$$P.\delta x; \quad P'.\delta x'; \ldots .$$
$$Q.\delta y; \quad Q'.\delta y'; \ldots .$$
$$R.\delta z; \quad R'.\delta z'; \ldots .$$

Ist das System im Gleichgewicht, so ist die Summe der virtuellen Momente gleich Null; also

$$1) \quad \Sigma\left[\left(m\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\delta x + \left(m\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\delta y + \left(m\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\delta z\right] = 0.$$

Hier bezeichnen δx, δy, δz die Komponenten irgend einer unendlich kleinen Verrückung, welche man dem Punkt (x, y, z) in einem beliebigen Augenblicke der Bewegung erteilen kann, ohne dadurch die Bedingungen zu verletzen, denen das System gerade in dem betrachteten Augenblicke unter-

liegt. Die Summe Σ erstreckt sich über alle materiellen Punkte des Systems, und für X, Y, Z sind Nullen zu setzen bei jenen Punkten, auf welche keine äufsere Kraft wirkt.

Durch totale Differentiation der $3n-k$ Bedingungsgleichungen in 34. erhält man:

$$2)\quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L}{\partial z}\delta z + \frac{\partial L}{\partial x'}\delta x' + \ldots\ldots = 0; \\ \frac{\partial M}{\partial x}\delta x + \frac{\partial M}{\partial y}\delta y + \frac{\partial M}{\partial z}\delta z + \frac{\partial M}{\partial x'}\delta x' + \ldots\ldots = 0; \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Multipliziert man diese letzteren Gleichungen mit unbestimmten Faktoren λ, μ, ν, ..., addiert sie darauf zu 1) hinzu und setzt dann die Coefficienten aller Variationen der Null gleich, so erhält man:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} - X + \lambda\frac{\partial L}{\partial x} + \mu\frac{\partial M}{\partial x} + \nu\frac{\partial N}{\partial x} + \ldots = 0;$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} - Y + \lambda\frac{\partial L}{\partial y} + \mu\frac{\partial M}{\partial y} + \nu\frac{\partial N}{\partial y} + \ldots = 0;$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} - Z + \lambda\frac{\partial L}{\partial z} + \mu\frac{\partial M}{\partial z} + \nu\frac{\partial N}{\partial z} + \ldots = 0;$$

$$m'\frac{d^2x'}{dt^2} - X' + \lambda\frac{\partial L}{\partial x'} + \mu\frac{\partial M}{\partial x'} + \nu\frac{\partial N}{\partial x'} + \ldots = 0;$$

....

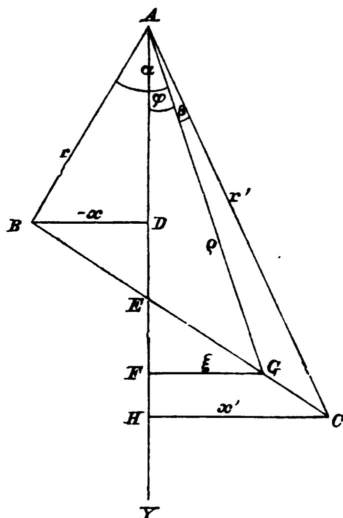
Eliminiert man nun die k unbestimmten Multiplikatoren λ, μ, ν, ..., so ergeben sich $3n-k$ Differentialgleichungen der zweiten Ordnung zwischen x, y, z, x', ... und der Zeit t.

38. **Aufgabe.** Es soll das Verhalten des Pendels mit zwei schweren Punkten mittelst des d'Alembert'schen Prinzips gefunden werden.

Lösung. Die beiden schweren Punkte seien B und C mit den Massen bezw. m und m'. (Siehe Fig. 11.) Beide

Punkte sind mit einander und dem Aufhängepunkte A fest verbunden. Der Schwerpunkt von m und m' liegt in G;

Fig. 11.



$GA = \varrho$ bilde mit der vertikalen y-Axe den Winkel φ, mit $BA = r$ den Winkel α, und mit $CA = r'$ den Winkel β. Die Schwingung des Pendels erfolge in der xy-Ebene. Es sei noch

$$BC = d; \quad BD = -x; \quad CH = x'; \quad FG = \xi;$$
$$AD = y; \quad AH = y'; \quad AF = \eta.$$

Die wirkende Kraft ist die Schwerkraft g. Es ist dann

$$X = 0; \quad Y = mg; \quad X' = 0; \quad Y' = m'g;$$

wenn X und Y, X' und Y' die bez. Komponenten der auf die materiellen Punkte B und C wirkenden Kräfte sind. Nach 36. folgt

$$P = m\frac{d^2x}{dt^2}; \quad Q = m\frac{d^2y}{dt^2} - mg;$$

$$P' = m'\frac{d^2x'}{dt^2}; \quad Q = m'\frac{d^2y'}{dt^2} - m'g.$$

Dies sind die Kräfte, welche vermöge der Bedingungen des Systems im Gleichgewicht sein müssen. Die Bedingungen des Systems liegen in der unveränderlichen Entfernung der Punkte A, B und C von einander. Es ist

$$r^2 = x^2 + y^2; \quad r'^2 = x'^2 + y'^2;$$
$$d^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2.$$

Zwischen den Coordinaten x, x', y, y' bestehen also drei Bedingungsgleichungen; daher lassen sie sich durch eine unabhängige Variabele ausdrücken. Als solche nehmen wir φ. Sind die Coordinaten des Schwerpunktes G: ξ und η, so bestehen die Gleichungen

$$mx + m'x' = (m + m')\xi;$$
$$my + m'y' = (m + m')\eta.$$

Nun ist

$$\xi = \varrho \sin\varphi; \quad \eta = \varrho \cos\varphi;$$
$$d^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - 2xx' - 2yy' =$$
$$r^2 + r'^2 - 2xx' - 2yy';$$

und weiter $\quad -x = r\sin(\alpha - \varphi);$

also $\quad x = r\sin(\varphi - \alpha); \quad x' = r'\sin(\varphi + \beta);$

$$y = r\cos(\varphi - \alpha); \quad y' = r'\cos(\varphi + \beta).$$

Das System ist nur um den festen Punkt A drehbar. Die Drehungsmomente für die Punkte B und C sind bezw.:

$$yP - xQ \text{ und } y'P' - x'Q'.$$

Für den Fall des Gleichgewichts ist

$$yP - xQ + y'P' - x'Q' = 0.$$

Setzt man für P, Q, P' und Q' die Werte, so wird

$$my\frac{d^2x}{dt^2} - mx\frac{d^2y}{dt^2} + mxg + m'y'\frac{d^2x'}{dt^2} - m'x'\frac{d^2y'}{dt^2} + m'x'g = 0;$$

oder

$$1) \quad m\left(y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2}\right) + m'\left(y'\frac{d^2x'}{dt^2} - x'\frac{d^2y'}{dt^2}\right)$$
$$+ g(mx + m'x') = 0.$$

Es ist nun

$$\frac{dx}{dt} = r\cos(\varphi - \alpha)\frac{d\varphi}{dt};$$

$$\frac{dy}{dt} = -r\sin(\varphi - \alpha)\frac{d\varphi}{dt}.$$

Multiplizieren wir beide Gleichungen bezw. mit $y = r\cos(\varphi - \alpha)$ und $-x = -r\sin(\varphi - \alpha)$, so wird

$$y\frac{dx}{dt} = r^2\cos^2(\varphi - \alpha)\frac{d\varphi}{dt};$$

$$-x\frac{dy}{dt} = r^2\sin^2(\varphi - \alpha)\frac{d\varphi}{dt}.$$

Addiert, giebt: $y\frac{dx}{dt} - z\frac{dy}{dt} = r^2\frac{d\varphi}{dt}.$

Durch Differentiation erhalten wir aus dieser letzten Gleichung:

$$y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2} = r^2\frac{d^2\varphi}{dt^2};$$

dementsprechend auch

$$y'\frac{d^2x'}{dt^2} - x'\frac{d^2y'}{dt^2} = r^2\frac{d^2\varphi}{dt^2};$$

ferner ist noch

$$mx + m'x' = (m + m')\varrho\sin\varphi.$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichung 1) ein, so wird

$$mr^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} + m'r'^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} + g(m + m')\varrho\sin\varphi = 0,$$

oder

$$\frac{mr^2 + m'r'^2}{\varrho(m + m')}\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2} + g\sin\varphi = 0.$$

Diese Differentialgleichung ist dieselbe, wie für das einfache, mathematische Pendel, dessen Länge

$$l = \frac{mr^2 + m'r'^2}{\varrho(m + m')}$$

ist.

Wenn statt zwei Punkte n Punkte gegeben sind, so erhalten wir in l statt der zwei Glieder n Glieder.

VII.

Allgemeine Gesetze der Bewegung freier Systeme.

39. Welche Verbindungen auch in einem bewegten System vorhanden sein mögen, so findet doch immer Gleichgewicht statt zwischen den Kräften, welche an den einzelnen Punkten bezw. die Komponenten P, Q, R, P', Q', R' .... haben. Dieses Gleichgewicht würde nicht gestört werden, wenn man zu den vorhandenen Verbindungen noch solche neue hinzufügte, dafs dieselben das System zu einem starren machten. Daher finden die Gleichungen, welche dann das Gleichgewicht ausdrücken, wirklich statt, während man die Verbindungen so läfst, wie sie gegeben sind.

Es sollen die Betrachtungen auf den Fall eines vollkommen freien Systems angewandt werden. Für das Gleichgewicht in diesem Falle (Teil I, 45.) giebt es sechs Bedingungsgleichungen. Drei davon drücken aus, dafs die Summen der Komponenten, parallel mit den Axen, einzeln Null sind. Die drei anderen lehren, dafs auch die Momentensummen aller Kräfte Null sein müssen in Bezug auf jede von denselben rechtwinkligen Axen.

Wir wollen nach einander die Folgerungen untersuchen, welche sich an beide Arten von Bedingungen knüpfen.

40. **Bewegung des Schwerpunkts.** Die drei ersten der erwähnten Gleichungen sind:

$$\Sigma\left(m\frac{d^2x}{dt^2}-X\right)=0;\ \Sigma\left(m\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right)=0;\ \Sigma\left(m\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right)=0.$$

Sie ergeben:

$$\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2}=\Sigma X;\quad \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2}=\Sigma Y;\quad \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2}=\Sigma Z.$$

Die ersten Glieder dieser Gleichungen lassen sich transformieren, indem man die veränderlichen Coordinaten ξ, η, ζ des Schwerpunkts des Systems einführt, worunter man denjenigen Punkt versteht, welcher in irgend einem Zeitpunkt der Bewegung zum Schwerpunkt des Systems werden würde, wenn man augenblicklich alle Punkte fest verbände. Es ist beständig:

$$\Sigma mx = M\xi; \quad \Sigma my = M\eta; \quad \Sigma mz = M\zeta;$$

wo M die Gesamtmasse des Systems bedeutet. Differenziiert man diese drei Gleichungen zweimal nach der Zeit t, so erhält man:

$$\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} = M\frac{d^2\xi}{dt^2}; \quad \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2} = M\frac{d^2\eta}{dt^2}; \quad \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2} = M\frac{d^2\zeta}{dt^2}.$$

Mithin wird auch

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2} = \Sigma X; \quad M\frac{d^2\eta}{dt^2} = \Sigma Y; \quad M\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \Sigma Z.$$

Durch diese Gleichungen ist die Bewegung des Schwerpunktes bestimmt.

Die Ausdrücke ΣX, ΣY, ΣZ in diesen Gleichungen enthalten die äufseren Kräfte; die gegenseitigen Wirkungen, welche etwa Zusammenziehung oder Ausdehnung der Teile des Systems, oder zwischen den materiellen Punkten wirkende Anziehung oder Abstofsung bewirken könnten, werden dabei nicht berücksichtigt; denn die inneren Kräfte, die auf den Schwerpunkt übertragen, stets zu je zweien einander gleich und direkt entgegengesetzt sind, haben notwendig eine Resultierende, die gleich Null ist. Folglich:

Die Bewegung eines freien Systems geschieht gerade so, als wenn alle Massen im Schwerpunkte vereinigt wären, und auf diesen unmittelbar alle äufseren Kräfte je nach ihrer Richtung wirkten.

Wenn keine äufsere Kraft am System wirkt, seine Bewegung also nur Folge der den materiellen Punkten erteilten

anfänglichen Geschwindigkeit ist, so reduzieren sich obige Gleichungen auf:

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2}=0;\quad M\frac{d^2\eta}{dt^2}=0;\quad M\frac{d^2\zeta}{dt^2}=0.$$

Wenn man in Beziehung auf die Zeit t integriert, erhält man daraus

$$M\frac{d\xi}{dt}=A;\quad M\frac{d\eta}{dt}=B;\quad M\frac{d\zeta}{dt}=C.$$

A, B, C bezeichnen Konstanten.

Welche Bewegung in diesem Falle die Teile des Systems gegen einander haben mögen, der Schwerpunkt beschreibt mit gleichförmiger Bewegung eine gerade Linie. Hierin besteht das **Prinzip der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts.**

41. **Prinzip der Flächen.** Betrachten wir nunmehr die drei letzten Gleichgewichtsbedingungen, welche ausdrücken, dafs die Momentensummen der Kräfte P, Q, R; P' . . . . . in Bezug auf die rechtwinkligen Axen Null sind. Sie lauten:

$$\Sigma\left[y\left(m\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right)-z\left(m\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right)\right]=0,$$
$$\Sigma\left[z\left(m\frac{d^2x}{dt^2}-X\right)-x\left(m\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right)\right]=0,$$
$$\Sigma\left[x\left(m\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right)-y\left(m\frac{d^2x}{dt^2}-X\right)\right]=0,$$

und können auf die Form gebracht werden:

$$\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\Sigma(yZ-zY),$$
$$\Sigma m\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right)=\Sigma(zX-xZ),$$
$$\Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\Sigma(xY-yX).$$

Die Ausdrücke auf der rechten Seite dieser Gleichungen stellen die Momente der auf die Punkte des Systems wirkenden Kräfte dar, bezw. in Beziehung auf die Axen der x,

der y und der z genommen; auf der linken Seite stehen die Differentialquotienten der in Beziehung auf die Zeit differenziierten Momente der Gröſsen der Bewegung $m\frac{dx}{dt}$, $m\frac{dy}{dt}$, $m\frac{dz}{dt}$, die, in Beziehung auf dieselben Axen genommen, den Punkten des Systems am Ende der Zeit t für ihre Bewegung nach Richtung der Coordinaten x, y, z zukommen.

Der Fall, daſs die rechte Seite der vorangehenden Gleichungen gleich Null ist, tritt ein: 1) wenn keine äuſsere Kraft auf das System wirkt; 2) wenn die äuſseren auf die verschiedenen Punkte des Systems wirkenden Kräfte beständig gegen den Anfangspunkt der Coordinaten wirken. Dann ist

$$\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=0,$$

$$\Sigma m\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right)=0,$$

$$\Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=0.$$

Integriert man nach t und bezeichnet mit A, B, C drei willkürliche Konstanten, so folgt:

$$\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=A,$$

$$\Sigma m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)=B,$$

$$\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=C.$$

Diese Gleichungen ergeben eine merkwürdige geometrische Eigenschaft jeder Bewegung, für welche sie gelten. Der Radiusvector vom Ursprung nach dem Punkt x, y, z beschreibt bei der Bewegung des letzten eine Kegelfläche. Die Projektionen derselben auf die Coordinatenebenen sind

jene Flächenräume, welche von den Projektionen des Leitstrahles durchstrichen werden. Diese wollen wir berechnen.

Die Projektion r des Leitstrahls auf die yz-Ebene bildet mit der y-Axe einen veränderlichen Winkel Θ. Man hat $\tan\Theta = \frac{z}{y}$; hieraus folgt

$$\frac{d\Theta}{\cos^2\Theta} = \frac{ydz - zdy}{y^2} = \frac{ydz - zdy}{r^2\cos^2\Theta};$$

oder

$$r^2 d\Theta = ydz - zdy.$$

Der Ausdruck $ydz - zdy$ stellt somit das doppelte Differential des vom Radius r durchstrichenen Flächenraums dar.

Bezeichnet man mit λ, λ', λ'' diejenigen Flächenräume, welche von den Projektionen der verschiedenen Leitstrahlen auf die Coordinatenebenen beschrieben werden, so kann man schreiben anstatt der früheren drei Gleichungen:

$$\Sigma m\frac{d\lambda}{dt} = \frac{A}{2};\quad \Sigma m\frac{d\lambda'}{dt} = \frac{B}{2};\quad \Sigma m\frac{d\lambda''}{dt} = \frac{C}{2}.$$

Daraus geht hervor:

$$\Sigma m\lambda = \frac{A}{2}t;\quad \Sigma m\lambda' = \frac{B}{2}t;\quad \Sigma m\lambda'' = \frac{C}{2}t;$$

wenn man die Flächen von $t = 0$ anfangen läfst; d. h.:

Die drei Summen der Projektionen jener Flächen, welche von den Leitstrahlen nach sämtlichen Punkten beschrieben werden, jede Fläche multipliziert mit der Masse des betreffenden Punktes, sind der Zeit proportional. Darin besteht das **Prinzip der Erhaltung der Flächen.**

Sucht man diejenige Ebene, auf welcher die mit den Massen multiplizierten Flächen die gröfste Projektionensumme geben, so findet man, dafs die Richtung dieser Ebene von der Zeit unabhängig ist. **Laplace,** welcher dies zuerst erkannte, hat ihr deshalb den Namen **unveränderliche Ebene** gegeben.

42. **Prinzip der lebendigen Kräfte.** Wenn der analytische Ausdruck für die Bedingungen der Verbindungen der materiellen Punkte nicht die Zeit enthält, so darf man in der Gleichung 1) in 37.:

$$\Sigma\left[\left(m\frac{d^2x}{dt^2}-X\right)\delta x+\left(m\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right)\delta y+\left(m\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right)\delta z\right]=0$$

die Variationen δx, δy, δz durch die Differentiale dx, dy, dz ersetzen, d. h. man darf statt der Verschiebungen, welche die Werte jener Variationen bestimmt, gleich die Bewegung nehmen, welche das System in dem Zeitelement erhält, das dem Augenblicke folgt, in welchem man es betrachtet. Dann geht die vorige Gleichung über in:

$$\Sigma\left(m\frac{d^2x}{dt^2}dx+m\frac{d^2y}{dt^2}dy+m\frac{d^2z}{dt^2}dz\right)=\Sigma(Xdx+Ydy+Zdz);$$

oder

$$\Sigma m\cdot\frac{dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z}{dt^2}=\Sigma(Xdx+Ydy+Zdz).$$

Die linke Seite ist nun das halbe Differential von $\Sigma m\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}\right)$ oder von Σmv^2, wenn v die Geschwindigkeit des Punktes mit der Masse m bezeichnet. Vorstehende Gleichung kann daher auch so geschrieben werden:

$$\frac{1}{2}d\,\Sigma mv^2=\Sigma(Xdx+Ydy+Zdz).$$

Wenn nun $\Sigma(Xdx+Ydy+Zdz)$ das vollständige Differential einer Funktion φ von x, y, z; x', y', z'; .... vorstellt, während man diese Gröfsen sämtlich als unabhängige Variabelen betrachtet, so läfst sich die Gleichung zwischen zwei beliebigen Zeitpunkten integrieren, wobei man erhält:

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0{}^2 = \varphi(x, y, z; x'; \ldots) - \varphi(x_0, y_0, z_0; x_0', \ldots).$$

In diesem Falle also vermag man den Zuwachs an lebendiger Kraft zu bestimmen, sobald man nur die Lagen aller Punkte für die betrachteten zwei Zeitpunkte kennt. So oft das bewegte System in die nämliche Lage zurückkehrt, wird die Summe der lebendigen Kräfte wieder dieselbe.

Sind die Kräfte X, Y, Z Null, dann verändert sich die Summe der lebendigen Kräfte nicht mit der Zeit und behält beständig ihren anfänglichen Wert. Darin besteht das **Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kräfte.**

Wenn alle Punkte des Systems nur der Schwere unterworfen sind, so hat man

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -gdm;$$

wobei die Axe der positiven z als der Schwere entgegengesetzt vorausgesetzt wird. Die Gleichung der lebendigen Kräfte wird daher, wenn z_0 und z_1 die Werte von z für den Schwerpunkt des Systems bezeichnen, sowie M dessen Gesamtmasse:

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0{}^2 = -gM(z_1 - z_0).$$

Die Summe der lebendigen Kräfte hängt demnach allein von der Höhe des Schwerpunktes ab und wird wieder dieselbe, so oft dieser Punkt auf die nämliche Horizontalebene zurückkehrt.

Die Funktion

$$\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz)$$

ist allemal dann ein vollständiges Differential von x, y, z, wenn die auf die materiellen Punkte wirkenden Kräfte gegen feste Mittelpunkte wirken und Funktionen der Entfernung der materiellen Punkte von diesen Mittelpunkten sind; sie ist es gleichfalls, wenn diese Kräfte aus den inneren Ein-

wirkungen hervorgehen, welche zwischen den verschiedenen Punkten des Systems wirken und wenn sie Funktionen der Entfernungen dieser Punkte von einander sind.

43. **Prinzip der kleinsten Wirkung.** Wir gehen aus von der Gröfse

$$\Sigma \int m v ds.$$

Hierin bezeichne ds das Element des Weges, welchen der Punkt von der Masse m in der Zeit dt durchlaufen hat, und v die Geschwindigkeit desselben Punktes am Ende der Zeit t. Das Integral wird zwischen zwei gegebenen Punkten der Bahn genommen, welche im Raume feste Lagen haben, und durch die der materielle Punkt hindurchgehen mufs. Die Bahn, welche der Punkt zwischen festen Punkten durchläuft, ist nicht von vornherein bestimmt; sie hängt ab von den Bedingungen des Systems und von den auf dasselbe wirkenden Kräften. Dann ist das **Prinzip der kleinsten Wirkung** folgendes: die von den verschiedenen materiellen Punkten beschriebenen Bahnen zwischen festen gegebenen Grenzen sind stets derartig, dafs die Gröfse $\Sigma \int mvds$ ein Minimum ist; nämlich kleiner, als wenn man durch neue Verbindungen die Punkte zwänge, unter dem Einflufs derselben Kräfte andere Kurven zwischen den nämlichen Endpunkten zu durchlaufen.

Dieser Satz gilt allein in dem Falle, dafs die Bedingungen des Systems unabhängig von der Zeit sind, und dafs die Funktion $\Sigma (Xdx + Ydy + Zdz)$ ein vollständiges Differential einer Funktion φ der Veränderlichen x, y, z ist.

Da $\frac{ds}{dt} = v$, oder $ds = vdt$ ist, so kann man auch für $\Sigma \int mvds$ schreiben: $\Sigma \int mv^2 dt$. Das Grundgesetz läfst sich dann auch so aussprechen: die Summe der in Beziehung auf die Zeit genommenen Integrale der lebendigen Kräfte des Systems zwischen zwei gegebenen Lagen ist stets das kleinstmögliche.

VIII.

Drehende Bewegung eines festen Körpers.

Von den Trägheitsmomenten.

44. Die Bestimmung der Bewegung eines festen Körpers macht die Betrachtung gewisser bestimmter Integrale notwendig, welche sich über den ganzen Körper erstrecken.

Trägheitsmoment eines Körpers in Bezug auf eine Gerade nennt man die Summe der Produkte der Massen aller Elemente in das Quadrat ihres Abstandes von der Geraden. Bedeutet dm die Masse des Elementes mit den Coordinaten x, y, z; r die Entfernung desselben von der Geraden, und sei r eine Funktion von x, y, z, so wird der Ausdruck für das Trägheitsmoment:

$$\Sigma r^2 dm.$$

Wenn die Masse des Körpers continuierlich ist, so geht die Summe über in das Integral

$$\int r^2 dm.$$

Das Integral erstreckt sich über die ganze Masse. Nimmt man die Gerade zur z-Axe, so wird das Trägheitsmoment:

$$\int (x^2+y^2)\, dm.$$

Die Trägheitsmomente in Bezug auf die Axen der y und x sind bezw.:

$$\int (x^2+z^2)\, dm; \text{ und } \int (y^2+z^2)\, dm.$$

45. Ist das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Gerade bekannt, so kann man es leicht in Bezug auf jede Parallele finden.

Nehmen wir die erste zur z-Axe; die Parallele habe die Gleichung: $x=a$, $y=b$; r' sei der Abstand des Elementes dm von der Parallelen.

Dann ist

$$r'^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2.$$

Das Moment in Bezug auf die Parallele wird nun ausgedrückt durch

$$\int r'^2 dm = \int [(x-a)^2 + (y-b)^2]\, dm;$$

oder

$$\int r'^2 dm = \int (x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)\, dm;$$

oder

$$\int r'^2 dm = \int (x^2+y^2) dm - 2a\int x dm - 2b\int y dm + (a^2+b^2)\int dm;$$

oder, wenn man unter ξ und η die Coordinaten des Schwerpunktes des Körpers versteht,

$$\int r'^2 dm = \int (x^2 + y^2)\, dm - 2am\xi - 2bm\eta + (a^2+b^2)\, m.$$

Wenn die z-Axe durch den Schwerpunkt des Körpers geht, so ist $\xi = 0$, und $\eta = 0$; und es wird

$$\int r'^2 dm = \int (x^2 + y^2)\, dm + (a^2 + b^2)\, m.$$

Ist P das Trägheitsmoment, in Beziehung auf die durch den Schwerpunkt gehende z-Axe, P' dasjenige in Bezug auf die parallele Gerade, so ist

$$P' = P + md^2,$$

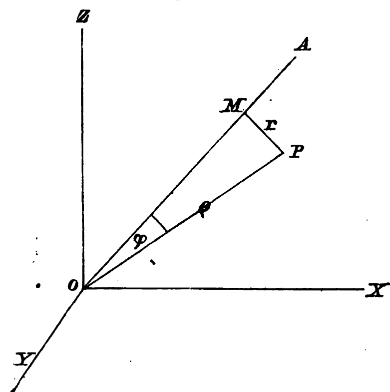
wo d die Entfernung beider Axen ist.

Man sieht, dass der Ausdruck nur abhängig ist von dem Abstande d, weshalb das Trägheitsmoment das nämliche ist in Bezug auf alle Erzeugungslinien eines geraden Cylinders mit kreisförmiger Basis, dessen Axe durch den Schwerpunkt des Körpers geht.

46. Wir wollen jetzt das Trägheitsmoment in Bezug auf irgend eine Gerade OA suchen, welche durch den Ursprung unter den Winkeln α, β, γ mit den Coordinatenaxen geführt ist. Hat man dasselbe, so kann man leicht nach dem Vorhergehenden das Trägheitsmoment in Bezug auf irgend eine Parallele, d. i. irgend eine Gerade im Raume bestimmen.

Es seien x, y, z die Coordinaten eines Punktes P des Körpers, und dm sei die Masse des Elementes, welches diesen

Fig. 12.



Punkt enthält; sein Abstand PM von OA sei r, und $OP = \varrho$ bilde mit OA den Winkel φ. Dann ist

$$r^2 = OP^2 - OM^2,$$

oder

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - \varrho^2 \cos^2\varphi.$$

Es bildet ϱ mit den Coordinatenaxen Winkel, deren Cosinusse sind bezw.:

$$\frac{x}{\varrho}, \frac{y}{\varrho}, \frac{z}{\varrho}.$$

Folglich ist

$$\cos\varphi = \frac{x}{\varrho}\cos\alpha + \frac{y}{\varrho}\cos\beta + \frac{z}{\varrho}\cos\gamma.$$

Es wird dann

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2,$$

oder

$$r^2 = x^2\sin^2\alpha + y^2\sin^2\beta + z^2\sin^2\gamma - 2yz\cos\beta\cos\gamma$$
$$- 2zx\cos\gamma\cos\alpha - 2xy\cos\alpha\cos\beta.$$

Bezeichnen wir das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf OA, d. i. $\int r^2 dm$ mit μ, so erhalten wir:

$$1)\ \mu = a \sin^2\alpha + b \sin^2\beta + c \sin^2\gamma$$
$$- 2d \cos\beta \cos\gamma - 2e \cos\gamma \cos\alpha - 2f \cos\alpha \cos\beta;$$

worin

$$\int x^2 dm = a;\ \int y^2 dm = b;\ \int z^2 dm = c,$$
$$\int yz dm = d;\ \int zx dm = e;\ \int xy dm = f.$$

Die Constanten a, b, c, d, e, f werden bestimmt durch die Natur des Körpers und seine Stellung zu den Axen.

Denken wir uns die Trägheitsmomente μ in Bezug auf alle durch O möglichen Geraden OA berechnet, und tragen wir auf jeder Geraden die ihr entsprechende Länge $OS = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$ auf, dann wird der Ort aller Punkte S eine vollkommen geschlossene Oberfläche bilden, weil OS stets reelle endliche Werte hat, welche stetig neben einander liegen. Um ihre Gleichung zu finden, bezeichne man die Coordinaten von S mit x, y, z. Dann hat man

$$\cos\alpha = x\sqrt{\mu};\ \cos\beta = y\sqrt{\mu};\ \cos\gamma = z\sqrt{\mu};$$
$$\frac{1}{\mu} = x^2 + y^2 + z^2.$$

Wenn man vermöge dieser Gleichungen aus 1) $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ eliminiert, so folgt:

$$2)\ (b + c)x^2 + (a + c)y^2 + (a + b)z^2$$
$$- 2dyz - 2exz - 2fxy = 1.$$

Der Ort ist also eine Fläche zweiten Grades, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt, und zwar ein Ellipsoid, da kein Radius unendlich werden kann. Poinsot nennt es das Centralellipsoid.

Gestalt und Lage dieses Ellipsoids hängen für denselben Ursprung von der Annahme der Coordinatenaxen nicht ab. Aber die Gleichung wird einfacher, wenn man seine rechtwinkligen Axen dazu nimmt. Nimmt man daher

dieses Axensystem an, so erhalten die Constanten a, b, c, d, e, f dadurch bestimmte Werte und zwar solche, dafs die Produkte der Coordinaten aus der Gleichung des Centralellipsoids wegfallen. Man hat folglich:

$$d=0,\ e=0,\ f=0,$$

oder

$$\int yz\,dm=0,\ \int xz\,dm=0,\ \int xy\,dm=0.$$

Diese besonderen Richtungen (die Axen des Centralellipsoids) führen den Namen **Hauptaxen der Trägheit.**

Bezeichnen A, B, C die Trägheitsmomente des Körpers in Bezug auf seine Hauptaxen oder die **Hauptträgheitsmomente**, so haben wir:

$$b+c=A,\ a+c=B,\ a+b=C;$$

die Gleichung 2) des Centralellipsoids wird also:

$$Ax^2+By^2+Cz^2=1.$$

47. Um das Trägheitsmoment μ in Bezug auf irgend eine durch den Ursprung gehende Axe, welche die Winkel α, β, γ mit den Hauptaxen bildet, zu finden, beachte man, dafs der entsprechende Radius des Ellipsoids die Länge $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ hat, dafs also sein Endpunkt zu Coordinaten hat:

$$x=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{\mu}};\quad y=\frac{\cos\beta}{\sqrt{\mu}};\quad z=\frac{\cos\gamma}{\sqrt{\mu}}.$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichung des Centralellipsoids ein, so findet sich:

$$\mu=A\cos^2\alpha+B\cos^2\beta+C\cos^2\gamma.$$

Ist $A=B$, so haben wir

$$\mu=A(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)+C\cos^2\gamma,$$

oder

$$\mu=A-(A-C)\cos^2\gamma.$$

Folglich sind dann die Trägheitsmomente die nämlichen in Bezug auf alle Geraden, welche durch den Ursprung gehen und mit der ungleichen Axe gleiche Winkel

bilden. Das Centralellipsoid ist in diesem Falle ein Rotationsellipsoid um die z-Axe.

Ist $A = B = C$, so wird

$$\mu = A;$$

d. h. die Trägheitsmomente sind in Bezug auf alle durch den Ursprung gehenden Geraden einander gleich. Das Centralellipsoid wird zu einer Kugel.

48. **Trägheitsmoment eines rechtwinkligen Parallelopipeds.** — Wir legen durch den Mittelpunkt des homogenen Parallelopipeds drei Parallelen mit den Kanten; dann haben wir die Hauptaxen zu dem Schwerpunkte. Es bezeichnen a, b, c die Kantenlängen, ϱ die Dichtigkeit, M die Masse. Das Trägheitsmoment in Bezug auf die z-Axe wird sodann

$$\varrho \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz = c\varrho \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

$$= c\varrho \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \left(bx^2 + \frac{b^3}{12}\right) dx = \frac{abc\varrho\,(a^2 + b^2)}{12} = M \frac{a^2 + b^2}{12} = C.$$

Analog werden die Trägheitsmomente in Bezug auf die beiden anderen Axen bezw.:

$$A = M \frac{b^2 + c^2}{12};\quad B = M \frac{a^2 + c^2}{12}.$$

Die Trägheitsmomente in Bezug auf die Kanten sind:

$$A = M \frac{b^2 + c^2}{3};\quad B = M \frac{a^2 + c^2}{3};\quad C = M \frac{a^2 + b^2}{3}.$$

49. **Trägheitsmoment eines Ellipsoids.** — Wir brauchen blofs die Trägheitsmomente in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehenden Hauptaxen der Trägheit zu kennen. Diese sind die Axen des Ellipsoids, welches als

homogen vorausgesetzt werde. Wir suchen das Trägheitsmoment in Bezug auf die z-Axe. Die Gleichung des Ellipsoids ist:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Das Trägheitsmoment wird ausgedrückt durch

$$C = \varrho \int\int\int (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz;$$

wenn ϱ die Dichte bezeichnet.

Die bez. Integrationsgrenzen ergeben sich aus der Gleichung des Ellipsoids. Es wird zunächst

$$C = 2\varrho c \int\int (x^2 + y^2) \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \cdot dx\, dy.$$

Diese Formel läfst sich auch so schreiben:

$$C = 2\varrho c \left[\int x^2 dx \int dy \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \right.$$
$$\left. + \int y^2 dy \int dx \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \right].$$

Es werden die Grenzen des Integrals

$$\int dy \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

durch die Werte $y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ bestimmt.

Setzt man zur Abkürzung $r = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, so läfst sich dieses Integral auch schreiben:

$$\frac{1}{b} \int_{-r}^{+r} dy \sqrt{r^2 - y^2};$$

da die Gröfse $\int_{-r}^{+r} dy \sqrt{r^2 - y^2}$ der Fläche eines mit dem Halbmesser r beschriebenen Halbkreises gleich ist, so ist der Wert dieses Integrals:

$$\frac{r^2\pi}{2b} = \frac{\pi}{2}b\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Demnach ist

$$\int x^2dx \int dy \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} = \frac{\pi}{2}b \int dx \left(x^2 - \frac{x^4}{a^2}\right);$$

integriert man endlich in Beziehung auf x zwischen den Grenzen $-a$ und $+a$, so erhält man:

$$\int x^2dx \int dy \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} = \frac{2\pi}{15}a^3b.$$

Ebenso leitet man

$$\int y^2dy \int dx \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} = \frac{2\pi}{15}ab^3$$

ab.

Das gesuchte Trägheitsmoment ist also

$$C = \frac{4}{15}\pi\varrho \cdot abc(a^2 + b^2).$$

Da der Inhalt des Ellipsoids $\frac{4}{3}\pi\,abc$ ist, so erhält man hiernach, wenn man durch M die Gesamtmasse dieses Körpers bezeichnet, die Werte der in Beziehung auf die drei Axen genommenen Trägheitsmomente:

$$A = M \cdot \frac{b^2 + c^2}{5}; \quad B = M \cdot \frac{a^2 + c^2}{5}; \quad C = M \cdot \frac{a^2 + b^2}{5}.$$

In dem Falle, wo $a = b = c$, hat man

$$A = \frac{2Ma^2}{5}$$

als Trägheitsmoment einer Kugel in Bezug auf irgend einen Durchmesser.

50. **Trägheitsmoment eines Kreiscylinders.** — Die Höhe des geraden homogenen Cylinders sei h, der Basisradius r, seine Dichtigkeit ϱ. Der Coordinatenursprung falle in den Mittelpunkt der Grundfläche, die z-Axe mit

der Axe des Cylinders zusammen. Das Trägheitsmoment in Beziehung auf die z-Axe stellt sich sodann dar als:

$$\varrho \int_{-r}^{+r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}} \int_{0}^{h} (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Das Integral geht über in:

$$h\varrho \int_{-r}^{+r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \frac{2}{3}\,h\;\varrho \int_{-r}^{+r} (2x^2+r^2)\,dx \cdot \sqrt{r^2-x^2}.$$

Substituieren wir

$$x = r\sin\varphi, \text{ so ist } \sqrt{r^2-x^2} = r\cos\varphi.$$

Die Grenzen

$$x = -r \text{ und } x = +r$$

werden $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ und $\varphi = +\frac{\pi}{2}$.

Das Integral geht also über in:

$$\frac{2}{3}h\varrho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (2r^2\sin^2\varphi + r^2)\,r^2\cos^2\varphi\,d\varphi$$

$$= \frac{4}{3}r^2h\varrho \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (2r^2\sin^2\varphi + r^2)\cos^2\varphi\,d\varphi$$

$$= \frac{4}{3}r^4h\varrho \left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\,d\varphi + 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi\right)$$

$$= \frac{4}{3}r^4h\varrho \left(\frac{\pi}{4} + 2\cdot\frac{\pi}{16}\right) = \frac{r^4h\pi\varrho}{2} = M\frac{r^2}{2},$$

sofern M die Masse des Cylinders bedeutet.

Wir wollen im folgenden das Trägheitsmoment berechnen in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt senkrecht zur Cylinderaxe führende Queraxe. Diese werde als x-Axe genommen. Der Ausdruck für das Trägheitsmoment in diesem Falle ist sodann:

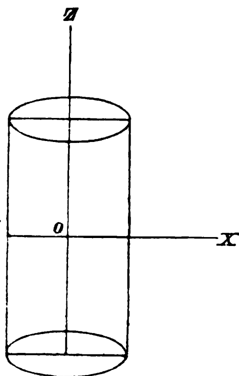


Fig. 13.

$$\varrho \int_{-r}^{+r} dy \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{-\sqrt{r^2-y^2}} dx \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (y^2 + z^2)\, dz.$$

Die Integration, nach z ausgeführt, liefert:

$$\varrho \int_{-r}^{+r} dy \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{+\sqrt{r^2-y^2}} \left((y^2 h + \frac{h^3}{12}\right) dx;$$

und weiter in Bezug auf x integriert, erhält man:

$$2h\varrho \int_{-r}^{+r} \left(y^2 + \frac{h^2}{12}\right) \sqrt{r^2 - y^2} \cdot dy.$$

Setzen wir $y = r \sin \varphi$, so geht das Integral über in:

$$4r^2 h\varrho \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(r^2 \sin{}^2\varphi + \frac{h^2}{12}\right) \cos{}^2\varphi\, d\varphi;$$

und dieses wird, wie früher:

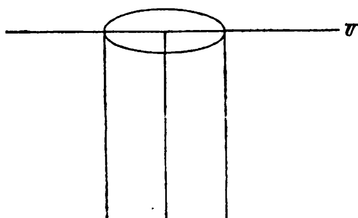
$$4r^2 h\varrho \left(\frac{r^2\pi}{16} + \frac{h^2\pi}{12 \cdot 4}\right) = r^2 h\pi\varrho \left(\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right) = M\left(\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right).$$

Das Trägheitsmoment in Bezug auf die U-Axe (Fig. 14) wird nach 45.

$$M\left(\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right) + M\left(\frac{h}{2}\right)^2 = M\left(\frac{r^2}{4}\right) + \left(\frac{h^2}{3}\right).$$

Wird r unendlich klein, so erhalten wir für das Trägheitsmoment eines Stabes: $M\frac{h^2}{3}$.

Fig. 14.



Bewegung eines Körpers um eine feste Achse.

51. Es soll die Bewegung eines Körpers von bekannter Gestalt und Dichte um eine feste Axe bestimmt werden, wenn entweder die Anfangsgeschwindigkeit oder die Momentankräfte bekannt sind, welche sie hervorgebracht haben.

Sind die Kräfte beliebig gerichtet, so läfst sich immerhin jede zerlegen in zwei, von welchen die eine parallel zur Drehaxe, und die andere in einer zu dieser senkrechten Ebene liegt. Die erste wird durch den Widerstand der Axe vernichtet, und man darf also bei der Untersuchung der Bewegung von dieser absehen und annehmen, dafs alle Kräfte in senkrechten Ebenen auf die Drehaxe wirken.

Dem Princip von d'Alembert zufolge findet Gleichgewicht statt zwischen den gegebenen und solchen Kräften, welche gleich und entgegengesetzt sind denjenigen, die den frei gedachten Punkten die Bewegung beibringen würden, welche sie wirklich befolgen. Betrachten wir von diesen letzteren die Tangential- und Normalkomponente. Die zweite (die Centripetalkraft) wird durch den Widerstand der Drehaxe aufgehoben. Wir brauchen nur die Tangentialkomponente zu berücksichtigen, welche den Zuwachs an Geschwin-

digkeit bewirkt. Diese wird vorgestellt durch $\frac{dv}{dt}dm$, wenn v die Geschwindigkeit und dm die Masse des Punktes bezeichnet. Bedeutet r dessen Abstand von der Drehaxe, und Θ den Winkel zweier durch diese gelegten Ebenen, deren eine fest ist, während die andere sich mit dem Körper bewegt, so hat man:

$$v = r\frac{d\Theta}{dt}; \text{ folglich } \frac{dv}{dt} = r^2\frac{d^2\Theta}{dt^2}.$$

v werde positiv vorausgesetzt, wenn Θ wächst; ebenso die Kraft, wenn sie dies zu bewirken strebt. Das Gleichgewicht eines Körpers um eine feste Axe verlangt, daſs die algebraische Summe der Kräftemomente in Bezug auf diese Axe Null sei. Hierbei sind positiv die Momente der Paare zu nehmen, welche den Winkel Θ zu vergröſsern streben.

Bezeichnet P irgend eine der gegebenen Kräfte, und p ihre Entfernung von der Drehaxe, so giebt das Gleichgewicht zwischen den Kräften P und $-r\frac{d^2\Theta}{dt^2}$ folgende Gleichung:

$$\Sigma Pp - \Sigma r^2\frac{d^2\Theta}{dt^2}dm = 0;$$

oder

$$\Sigma Pp - \frac{d^2\Theta}{dt^2}\Sigma r^2 dm = 0,$$

wo das Summenzeichen sich auf alle Punkte des Körpers bezieht.

Es bezeichne Mk^2 das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf eine zur Drehaxe Parallele, welche durch seinen Schwerpunkt geht. M bedeutet die Masse; die Entfernung des Schwerpunktes von der Drehaxe sei l; dann haben wir:

$$\Sigma r^2 dm = \int r^2 dm = M(k^2 + l^2);$$

und die vorletzte Gleichung wird:

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} = \frac{\Sigma Pp}{M(k^2 + l^2)}.$$

Durch Integrieren erhält man hieraus Θ ausgedrückt durch t und zwei Konstanten. Diese Konstanten und mit ihnen die Bewegung aller Punkte des Körpers werden bestimmt, wenn man die Werte von Θ und $\frac{d\Theta}{dt}$ für $t = 0$, also Lage und Winkelgeschwindigkeit des Körpers beim Beginn der Bewegung kennt.

52. **Bewegung um eine horizontale Axe.** — Wir nehmen die Drehaxe zur y-Axe, während die z-Axe der Schwere entgegengesetzt sei. Der Winkel Θ werde gebildet von der vertikalen yz-Ebene mit der durch die Drehaxe und den Schwerpunkt des Körpers gelegten Ebene. Das Moment der Schwere an dem Element dm beträgt $gxdm$. Die letzte Gleichung in 52. wird daher:

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} = \frac{g\int xdm}{M(k^2+l^2)},$$

oder, wenn ξ die Abscisse des Schwerpunktes bezeichnet,

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} = \frac{g\xi}{k^2 + l^2}.$$

Es ist

$$\xi = l \sin\Theta; \text{ folglich}$$

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} = \frac{gl}{k^2 + l^2} \sin\Theta.$$

Ein fester Körper, der um eine horizontale Axe schwingt, heifst ein zusammengesetztes oder physisches Pendel.

Für die Bewegung des einfachen (mathematischen) Pendels von der Länge a hat man die Gleichung:

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} = \frac{g}{a} \sin\Theta.$$

Es macht demnach das physische Pendel dieselbe Bewegung, wie ein mathematisches von der Länge

$$a = \frac{k^2 + l^2}{l} = l + \frac{k^2}{l}.$$

Unter der Länge eines physischen Pendels versteht man die Länge desjenigen mathematischen Pendels, welches gleiche Bewegung mit ihm hat.

Mit dem Namen Schwingungsmittelpunkt bezeichnet man den Punkt eines um eine feste, horizontale Axe schwingenden Körpers, in welchem man die Gesamtmasse des Körpers concentriert denken könnte, ohne dadurch die Beschaffenheit und die Dauer der Schwingungen zu ändern. Es folgt aus dem Obigen, dafs alle Punkte, welche in einer durch die feste Axe und durch den Schwerpunkt hindurchgehenden Ebene in der Entfernung $\frac{k^2 + l^2}{l}$ von der festen Axe liegen, jene Eigenschaft haben.

Zwischen dem Schwingungsmittelpunkt und dem Aufhängepunkte des Pendels besteht die Beziehung, dafs, wenn jenes Aufhängepunkt des Pendels wird, dieser umgekehrt wieder Schwingungsmittelpunkt werden mufs.

Die Bewegung ist dieselbe für alle Axen, welche für das Pendel gleiche Länge ergeben.

53. **Bewegung durch einen Stofs.** — Wir wollen jetzt bestimmen, welche Winkelgeschwindigkeit der Körper annimmt, wenn er während einer sehr kleinen Zeit der Wirkung eines Stofses unterliegt.

Die Anfangsgeschwindigkeit werde hervorgebracht durch den Stofs eines Punktes von der Masse μ und Geschwindigkeit c, welche in einer auf die feste Drehaxe senkrechten Ebene nach einer Geraden gerichtet sei, die von der Axe um das Stück f entfernt ist. Die Masse μ möge sich mit dem Körper in dem Treffpunkte verbinden; p sei dessen Abstand von der Drehaxe.

Bezeichnet ω die Winkelgeschwindigkeit des Systems nach dem Stofs und P die Kraft, welche in Wirklichkeit

die Bewegung hervorbringt, so liefert das Princip von d'Alembert:

$$\omega \int r^2 dm = Pp.$$

Wir zerlegen uns die Geschwindigkeit c nach dem Radius und der Tangente des Kreises, welchen der gestofsene Punkt um die Axe beschreibt; die erste Komponente wird vernichtet, und die zweite hat den Wert

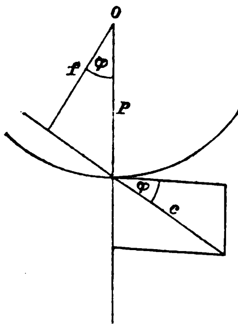


Fig. 15.

$$c \cdot \frac{f}{p}.$$

Die Masse μ hat an Geschwindigkeit verloren $\frac{cf}{p} - p\omega$; die entsprechende Bewegungsgröfse beträgt $\mu\left(\frac{cf}{p} - p\omega\right)$. Eine so grofse Momentankraft hat folglich auch der Masse μ entgegengewirkt; und da Wirkung und Gegenwirkung gleich sind, so ist dieser Ausdruck auch das Mafs der Momentankraft, welche auf den Körper gewirkt hat. Wir erhalten demnach hier:

$$\omega \int r^2 dm = \mu p \left(\frac{cf}{p} - p\omega\right);$$

daher

$$\omega = \frac{\mu c f}{\int r^2 dm + \mu p^2}.$$

Der Nenner ist das Trägheitsmoment des Körpers und der mit ihm verbundenen Masse.

54. **Stofs gegen die Drehaxe.** — Der Stofs, welcher den Körper in Bewegung versetzt, bringt eine Erschütterung der festen Axe hervor, und es ist für die praktische Anwendung von Wichtigkeit, diese zu kennen. Wir nehmen die Drehaxe zur z-Axe und zur xy-Ebene die darauf senkrechte Ebene, welche durch den Angriffspunkt der Kraft

geführt ist. Seine Coordinaten seien a, b, c, und die Komponenten des Stofses A, B, C. Das Element dm habe die Coordinaten x, y, z und den Abstand r von der Drehaxe; Θ sei der Winkel, den die x-Axe bildet mit der Projektion von r auf die xy-Ebene, und ω die erzeugte Winkelgeschwindigkeit.

Gleichgewicht findet statt zwischen A, B, C und dem System der auf alle Elemente des Körpers sich beziehenden Kräfte. Die Kraft, welche auf das Massenteilchen dm einwirkt, ist $r\omega dm$. Zerlegen wir sie nach den drei Coordinatenaxen, so erhalten wir bezw.:

$$+ r\omega \sin \Theta dm; \quad - r\omega \cos \Theta dm; \quad \text{und } 0.$$

Es ist

$$\sin \Theta = \frac{y}{r}; \quad \cos \Theta = \frac{r}{x};$$

folglich werden die Komponenten:

$$+ \omega y dm; \quad - \omega x dm; \quad \text{und } 0.$$

Wenn man statt aller im Gleichgewicht stehenden Kräfte drei nach den Coordinatenaxen gerichtete und drei Kräftepaare setzt, deren Axen in denselben Richtungen liegen, so sind die Kräfte:

$$A + \omega \int y dm; \quad B - \omega \int x dm; \quad C.$$

Die Momente der Kräftepaare werden ausgedrückt durch:
$bC + \omega \int xz dm; \; - aC + \omega \int yz dm; \; aB - bA - \omega \int r^2 dm.$
Das letzte Moment ist Null wegen des Gleichgewichts um die feste Axe.

55. **Mittelpunkt des Stosses.** Wir wollen nun die Bedingungen suchen, unter welchen die feste Axe keinen Stofs erleidet. Dazu ist erforderlich (nach dem d'Alembertschen Prinzipe), dafs die nach den Coordinatenaxen gerichteten Kräfte und die in den Coordinatenebenen liegenden Paare Null sind. Wir führen der Einfachheit wegen die xz-Ebene durch den Schwerpunkt (ξ, η, ζ) des Körpers, be-

halten sonst aber das Coordinatensystem in 54. bei. Da jetzt $\eta = 0$, so mufs sein:

$$C = 0; \quad A = 0; \quad B = \omega M \xi,$$
$$\int xzdm = 0; \quad \int yzdm = 0; \quad aB = \omega \int r^2 dm;$$

wo M die Masse des Körpers bedeutet.

Die vierte und fünfte Gleichung zeigen, dafs die Drehaxe eine von den zum Coordinatenursprung gehörenden Hauptaxen der Trägheit sein mufs. Die erste und zweite drücken aus, dafs die Kraftrichtung senkrecht stehen mufs auf der durch die Drehaxe und den Schwerpunkt des Körpers bestimmten Ebene.

Setzt man den Wert für ω aus der dritten Gleichung in die sechste ein, so erhält man für den Abstand, welchen die Richtung des Stofses von der Drehaxe haben mufs:

$$a = \frac{\int r^2 dm}{M \xi}.$$

Bezeichnet Mk^2 das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf eine zur Drehaxe Paralle durch den Schwerpunkt, so geht diese Gleichung über in:

$$a = \frac{M\xi^2 + Mk^2}{M\xi};$$

oder

$$a = \xi + \frac{k^2}{\xi}.$$

Demnach mufs a gleich sein dem Abstand der Drehaxe vom Schwingungspunkt des Körpers um dieselbe.

Damit die Drehaxe keinen Stofs erleide, so ist hiernach notwendig und hinreichend:

1) dafs die Kraftrichtung senkrecht stehe auf der die Drehaxe mit dem Schwerpunkt des Körpers verbindenden Ebene;

2) dafs die Drehaxe eine Hauptträgheitsaxe des Körpers sei in Bezug auf ihren Durchschnittspunkt mit der auf ihr senkrechten Ebene, welche die Kraftrichtung enthält;

3) dafs die Entfernung der Kraft von der Drehaxe ebenso grofs sei, wie der Abstand des Schwingungspunktes des Körpers um diese Axe.

Der Durchschnittspunkt der Kraftrichtung mit der durch die Drehaxe und den Schwerpunkt gehenden Ebene wird **Mittelpunkt des Stosses** genannt; er liegt auf der Linie der Schwingungspunkte.



Inhalts-Verzeichnis.